Plaquette 3 – Formule des probabilités totales

Probabilités conditionnelles — Première générale

Exercices

Méthode

Un événement se réalise souvent par **plusieurs chemins**. La formule des probabilités totales dit simplement qu'il faut alors les additionner tous : $P(B) = P(A)P_A(B) + P\left(\overline{A}\right)P_{\overline{A}}(B)$. C'est le calcul que l'on faisait déjà en lisant un arbre, mais nommé et généralisé à une partition de trois, quatre ou n événements. Elle ouvre surtout la porte à la question la plus utile du chapitre : **inverser une conditionnelle**. Connaissant $P_A(B)$, on obtient $P_B(A)$ en deux temps — la formule des probabilités totales pour $P(B)$, puis la définition de la conditionnelle. C'est ainsi qu'on calcule la fiabilité réelle d'un test de dépistage, et le résultat surprend presque toujours.

Exercice 1 – Première application de la formule

On donne $P(A) = 0{,}40$, $P_A(B) = 0{,}70$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}25$.

a) Calculer $P(A \cap B)$ et $P\left(\overline{A} \cap B\right)$.

b) En déduire $P(B)$ par la formule des probabilités totales.

c) Vérifier le résultat en calculant $P\left(\overline{B}\right)$ de deux façons.

Exercice 2 – Le taux de pièces défectueuses

Une usine produit des pièces sur deux machines : A fournit 60 % de la production avec 2 % de défauts, B fournit le reste avec 5 % de défauts.

a) Calculer la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit défectueuse.

b) Le taux global de défauts est-il la moyenne de 2 % et 5 % ? Justifier.

c) Sur 10 000 pièces, combien de pièces défectueuses peut-on attendre ?

Exercice 3 – Une partition de trois événements

Une entreprise s'approvisionne chez trois fournisseurs : A (50 % des pièces, 1 % de défauts), B (30 %, 4 %) et C (20 %, 6 %).

a) Vérifier que les trois événements A, B, C forment une partition.

b) Calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.

c) Quel fournisseur contribue le plus aux pièces défectueuses ?

Exercice 4 – Inverser une conditionnelle

On reprend l'usine à deux machines : $P(A) = 0{,}60$, $P_A(D) = 0{,}02$, $P_{\overline{A}}(D) = 0{,}05$, et l'on a trouvé $P(D) = 0{,}032$.

a) Calculer $P_D(A)$.

b) Calculer $P_D\left(\overline{A}\right)$ et vérifier la somme.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Interpréter $P_D(A)$ en une phrase, et la comparer à $P_A(D)$.

Exercice 5 – La vraie fiabilité d'un test

Une maladie touche 2 % d'une population. Le test est positif chez 95 % des malades et chez 3 % des personnes non malades.

a) Calculer $P(T)$, la probabilité qu'un test soit positif.

b) Calculer $P_T(M)$, arrondie au millième.

c) Commenter : un test « fiable à 95 % » signifie-t-il qu'un résultat positif soit exact à 95 % ?

Exercice 6 – L'effet de la prévalence

On garde le même test ($P_M(T) = 0{,}95$ et $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}03$), mais on l'applique à une population à risque où la maladie touche 30 % des personnes.

a) Calculer $P(T)$ dans cette population.

b) Calculer $P_T(M)$, arrondie au millième.

c) Comparer avec le résultat obtenu pour une prévalence de 2 % et conclure.

Exercice 7 – Un sondage par tranches d'âge

Un sondage porte sur trois tranches d'âge : les 18–30 ans (30 % des sondés), les 31–50 ans (40 %) et les plus de 50 ans (30 %). Le taux de réponses favorables est respectivement de 60 %, 45 % et 30 %.

a) Calculer la proportion globale de réponses favorables.

b) Parmi les personnes ayant répondu favorablement, quelle proportion a entre 18 et 30 ans ?

c) Vérifier que les trois proportions inversées somment à 1.

Exercice 8 – Ponctualité de deux lignes

Dans une ville, 55 % des trajets se font en bus et le reste en tramway. Un trajet en bus est ponctuel avec une probabilité de 0,90, un trajet en tramway avec une probabilité de 0,97.

a) Calculer la probabilité qu'un trajet pris au hasard soit ponctuel.

b) Calculer la probabilité qu'un trajet soit en retard.

c) Parmi les trajets en retard, quelle proportion s'est faite en bus ?

Exercice 9 – Un filtre anti-spam

Dans une messagerie, 40 % des messages reçus sont des spams. Un certain mot-clé apparaît dans 85 % des spams et dans 5 % des messages légitimes.

a) Calculer la probabilité qu'un message contienne ce mot-clé.

b) Un message contient ce mot-clé. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un spam ?

c) Le filtre qui bloque tous les messages contenant ce mot-clé est-il acceptable ? Discuter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Sinistres et primes d'assurance

Un assureur compte 25 % de conducteurs de moins de 25 ans. La probabilité de déclarer un sinistre dans l'année est de 0,18 pour ces jeunes conducteurs et de 0,07 pour les autres.

a) Calculer la probabilité qu'un assuré déclare un sinistre dans l'année.

b) Parmi les assurés ayant déclaré un sinistre, quelle proportion a moins de 25 ans ?

c) Sur 40 000 assurés, combien de sinistres attend-on, et combien viennent de jeunes conducteurs ?

Exercice 11 – Retrouver une conditionnelle manquante

On sait que $P(A) = 0{,}30$, $P_A(B) = 0{,}60$ et $P(B) = 0{,}39$.

a) Calculer $P(A \cap B)$.

b) En déduire $P\left(\overline{A} \cap B\right)$, puis $P_{\overline{A}}(B)$.

c) Vérifier le résultat avec la formule des probabilités totales.

Exercice 12 – Un club et ses compétitions

Dans un club, 70 % des adhérents sont majeurs. Parmi les majeurs, 35 % participent aux compétitions ; parmi les mineurs, 60 % y participent.

a) Calculer la probabilité qu'un adhérent participe aux compétitions.

b) Parmi les compétiteurs, quelle proportion est majeure ?

c) Comparer cette proportion à celle des majeurs dans le club, et commenter.

Exercice 13 – Deux entrepôts et leurs retards

L'entrepôt E_1 traite 65 % des colis avec 8 % de retards ; E_2 traite le reste avec 15 % de retards.

a) Calculer la probabilité qu'un colis soit en retard.

b) Parmi les colis en retard, quelle proportion vient de E_1 ?

c) Un client reçoit un colis en retard. Est-il plus probable qu'il vienne de E_1 ou de E_2 ?

Exercice 14 – Compléter une donnée par les probabilités totales

Une chaîne de production comporte deux lignes. La ligne 1 traite 40 % des articles. On sait que 6 % des articles de la production totale sont non conformes, et que la ligne 1 produit 4 % de non-conformes.

a) Déterminer la probabilité qu'un article vienne de la ligne 1 et soit non conforme.

b) En déduire le taux de non-conformes de la ligne 2.

c) Parmi les articles non conformes, quelle proportion vient de la ligne 2 ?

Exercice 15 – Synthèse : contrôle qualité et décision

Un atelier produit des composants sur trois lignes : L_1 (45 % de la production, 2 % de défauts), L_2 (35 %, 5 %) et L_3 (20 %, 8 %).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Vérifier que les trois lignes forment une partition, puis calculer le taux global de défauts.

b) Calculer la contribution de chaque ligne aux composants défectueux, en pourcentage du total des défauts.

c) Sur une production de 50 000 composants, combien de défauts attend-on par ligne ?

d) L'atelier peut ramener le taux de défaut d'**une seule** ligne à 1 %. Laquelle choisir pour faire baisser le plus possible le taux global ? Justifier par le calcul.

e) Un composant est défectueux. De quelle ligne vient-il le plus probablement ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).