

Plaquette 4 – Interpolation et extrapolation

Statistiques à deux variables — Première générale

Exercices

Méthode

Une droite d'ajustement sert à **estimer**, mais pas n'importe où. Estimer à l'intérieur de l'intervalle des données observées, c'est **interpoler** : l'estimation est encadrée par des relevés réels, elle est fiable. Estimer en dehors, c'est **extrapoler** : plus on s'éloigne, plus l'estimation est fragile, et elle finit souvent par devenir absurde — une consommation négative, une note supérieure à 20, une population multipliée par mille. Cette plaquette apprend à distinguer les deux situations, à **annoncer** laquelle on pratique, et à repérer le moment où le modèle cesse d'avoir un sens. On y travaille aussi la question inverse — trouver le x qui atteint un seuil donné — avec le soin d'arrondi que cela demande.

Exercice 1 – Interpolation ou extrapolation ?

Une série de chiffres d'affaires a été relevée pour les années de rang 1 à 6, et ajustée par la droite $y = 3,83x + 7,60$.

Pour chacune des estimations suivantes, dire s'il s'agit d'une interpolation ou d'une extrapolation.

- le chiffre d'affaires de l'année de rang 3,5
- celui de l'année de rang 8
- celui de l'année de rang 0
- celui de l'année de rang 5,2

Exercice 2 – Interpoler une valeur manquante

Le tableau donne le chiffre d'affaires (en milliers d'euros) d'une entreprise, mais la donnée de l'année 4 a été perdue.

Année x	1	2	3	4	5	6
Chiffre y	12	15	19	?	27	31

La droite d'ajustement construite sur les cinq données disponibles est $y = 3,86x + 7,67$.

- Estimer le chiffre d'affaires de l'année 4.
- S'agit-il d'une interpolation ou d'une extrapolation ?
- L'estimation est-elle cohérente avec les valeurs voisines ?

Exercice 3 – Extrapoler avec prudence

On garde la droite $y = 3,83x + 7,60$, ajustée sur les rangs 1 à 6.

- Estimer le chiffre d'affaires de l'année 8, puis celui de l'année 20.
- Laquelle des deux estimations est la plus fiable ? Justifier.
- Estimer celui de l'année 50. Que penser de ce résultat ?

Exercice 4 - Quand le modèle devient impossible

La consommation de gaz (en m^3/jour) en fonction de la température x (en $^{\circ}\text{C}$) est ajustée, pour des températures de 2 à 14 $^{\circ}\text{C}$, par

$$y = -1,25x + 22,71$$

- a) Estimer la consommation à 9 $^{\circ}\text{C}$.
- b) Estimer la consommation à 25 $^{\circ}\text{C}$. Commenter.
- c) À partir de quelle température le modèle donne-t-il une consommation négative ?

Exercice 5 - Une note plafonnée

La note y (sur 20) de huit élèves en fonction de leur nombre d'heures de révision x (de 1 à 8 heures) est ajustée par

$$y = 1,476x + 1,357$$

- a) Estimer la note d'un élève ayant révisé 6,5 heures.
- b) Estimer celle d'un élève ayant révisé 15 heures. Commenter.
- c) À partir de combien d'heures le modèle donne-t-il une note supérieure à 20 ?

Exercice 6 - Atteindre un seuil

Les ventes trimestrielles de vélos électriques, relevées du trimestre 1 au trimestre 6, sont ajustées par

$$y = 8,571x + 25$$

- a) Résoudre l'équation $8,571x + 25 = 100$.
- b) En déduire le premier trimestre où les ventes dépasseraient 100 vélos.
- c) Vérifier la réponse en calculant les ventes estimées des deux trimestres voisins.

Exercice 7 - Loyers : deux estimations très inégales

Les loyers de six appartements, de 20 à 70 m^2 , sont ajustés par

$$y = 13,343x + 217,905$$

où y est en euros et x en m^2 .

- a) Estimer le loyer d'un appartement de 45 m^2 , puis celui d'un studio de 10 m^2 .
- b) Pour chacune, préciser s'il s'agit d'une interpolation ou d'une extrapolation.
- c) Estimer le loyer d'un appartement de 150 m^2 et discuter la validité du résultat.

Exercice 8 - Extrapoler sur la taille d'un nouveau-né

La masse y (en kg) de sept nouveau-nés, de 46 à 54 cm, est ajustée par

$$y = 0,170x - 5,206$$

- a) Estimer la masse d'un nouveau-né de 53 cm.
- b) Estimer celle d'un enfant de 60 cm, puis celle d'un bébé de 30 cm. Commenter chaque résultat.
- c) Quel est le domaine de validité raisonnable de ce modèle ?

Exercice 9 - Une population qui sature

La population d'un village, relevée de 2015 à 2021, est ajustée par $y = 46x + 1\,240$, où x est le nombre d'années après 2015 et y la population.

- Estimer la population en 2024, puis en 2035.
- Le plan local d'urbanisme limite la commune à 2 500 habitants. En quelle année ce plafond serait-il atteint ?
- Que se passera-t-il en réalité une fois le plafond atteint ? Le modèle affine reste-t-il pertinent ?

Exercice 10 - Arrondir dans le bon sens

Un abonnement coûte $y = 4,2x + 18$ euros au bout de x mois. Un client dispose d'un budget de 100 €.

- Résoudre l'équation $4,2x + 18 = 100$.
- Combien de mois entiers le client peut-il payer sans dépasser son budget ?
- Un élève répond « 20 mois ». Expliquer son erreur.

Exercice 11 - Deux horizons de prévision

Le nombre d'abonnés d'un service, relevé pendant les 12 premiers mois, est ajusté par $y = 1,8x + 12$ (en milliers d'abonnés, x en mois).

- Estimer le nombre d'abonnés au bout de 14 mois, puis au bout de 60 mois.
- Comparer la fiabilité des deux estimations.
- Au bout de 60 mois, le modèle prévoit-il un nombre d'abonnés réaliste pour un service national ? Que manquerait-il au modèle ?

Exercice 12 - Une extrapolation raisonnable

On mesure l'allongement y (en mm) d'un ressort en fonction de la masse x (en g) accrochée, pour des masses de 50 à 250 g. L'ajustement donne

$$y = 0,24x + 0,5 \quad \text{avec } r \approx 0,9997$$

- Estimer l'allongement pour une masse de 180 g, puis pour 300 g.
- Pourquoi l'extrapolation à 300 g est-elle ici plus crédible que dans les exercices précédents ?
- Existe-t-il malgré tout une limite à cette extrapolation ?

Exercice 13 - Ajuster seulement une partie du nuage

On reprend les relevés de consommation d'un véhicule.

Vitesse x (km/h)	50	70	90	100	110	130
Consommation y (L/100 km)	5,2	5,0	5,4	5,9	6,5	7,8

En écartant le relevé à 50 km/h, la calculatrice donne $a = 0,0475$, $b = 1,37$ et $r \approx 0,971$.

- Pourquoi est-il légitime d'écarter le relevé à 50 km/h ?

- b) Comparer le nouveau coefficient de corrélation à l'ancien ($r \approx 0,890$).
- c) Estimer la consommation à 120 km/h avec ce nouveau modèle, et comparer à l'estimation obtenue avec les six points (6,9 L/100 km).

Exercice 14 - Prévoir un budget

Les dépenses annuelles d'entretien d'une flotte de véhicules, relevées de l'année 1 à l'année 7, sont ajustées par $y = 2,4x + 15$, où y est en milliers d'euros.

- a) Estimer les dépenses de l'année 9.
- b) Le budget alloué est de 40 milliers d'euros par an. À partir de quelle année sera-t-il insuffisant ?
- c) Quelle recommandation formuler au gestionnaire, en tenant compte de la nature de l'estimation ?

Exercice 15 - Deux modèles, deux prévisions

Une série de six relevés est ajustée de deux façons : par la droite de régression $y = 5,1x + 20$ et par la droite de Mayer $y = 4,8x + 21,5$. Les données couvrent les rangs 1 à 6.

- a) Comparer les deux estimations pour $x = 4$.
- b) Comparer les deux estimations pour $x = 25$.
- c) Que conclure sur le choix de la méthode d'ajustement selon l'horizon de prévision ?

Exercice 16 - Synthèse : production d'électricité solaire

La production d'électricité solaire d'une commune, en MWh, a été relevée de 2018 à 2024.

Année	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Rang x	0	1	2	3	4	5	6
Production y	120	145	178	205	236	262	295

- a) Calculer les coordonnées du point moyen.
- b) La calculatrice donne $a \approx 29,179$ et $b \approx 118,321$. Vérifier que la droite passe par le point moyen.
- c) Estimer la production de 2023 avec le modèle, et la comparer au relevé. Commenter.
- d) Estimer la production de 2028, puis de 2050. Préciser à chaque fois la nature de l'estimation.
- e) À partir de quelle année la production dépasserait-elle 500 MWh ? Formuler une réserve.