Plaquette 5 – Synthèse : études statistiques complètes

Statistiques à deux variables — Première générale

Exercices

Méthode

Dernière plaquette : l'**étude complète** d'une série à deux variables, telle qu'elle tombe au bac. Le plan est toujours le même, et il vaut la peine de l'apprendre par cœur — nuage, point moyen, droite de régression, coefficient de corrélation, estimation, **critique**. Les cinq premières étapes sont du calcul ; la sixième est celle qui fait la différence : dire si l'ajustement est légitime, si l'estimation est une interpolation ou une extrapolation, et si le résultat est possible. Les énoncés ci-dessous enchaînent quatre à six questions, comme un exercice d'examen, et couvrent des contextes variés : tarifs, environnement, salaires, consommation, météo. Toutes les valeurs de a, b et r sont celles qu'affiche une calculatrice.

Exercice 1 – Étude complète : prix d'un forfait mobile

Le tableau donne le prix moyen y (en euros) d'un forfait mobile en fonction du rang x de l'année.

x	1	2	3	4	5	6	7
y	38	42	47	50	55	59	63

La calculatrice donne $a \approx 4{,}179$, $b \approx 33{,}857$ et $r \approx 0{,}999$.

a) Calculer les coordonnées du point moyen G.

b) Vérifier que la droite de régression passe par G.

c) Commenter la valeur de r, puis interpréter a.

d) Estimer le prix de l'année 10 et préciser la nature de l'estimation.

Exercice 2 – Étude complète : pistes cyclables

Une ville relève la longueur de ses pistes cyclables, en kilomètres, x années après 2019.

x	0	1	2	3	4	5
y	12	18	25	33	38	46

La calculatrice donne $a = 6{,}8$, $b \approx 11{,}667$ et $r \approx 0{,}999$.

a) Calculer le point moyen et vérifier que la droite y passe.

b) Interpréter les deux coefficients a et b.

c) Estimer la longueur des pistes en 2027.

d) La ville visait 100 km. En quelle année cet objectif serait-il atteint ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 3 – Étude complète : réduction des déchets

La production de déchets ménagers, en kg par habitant et par an, est relevée x années après 2018.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	540	512	488	461	434	410	383

La calculatrice donne $a \approx -26{,}036$, $b = 539{,}25$ et $r \approx -0{,}9999$.

a) Commenter le signe et la valeur de r.

b) Interpréter le coefficient a.

c) Estimer la production en 2028.

d) En quelle année passerait-on sous 300 kg par habitant ?

e) Le modèle peut-il rester valable indéfiniment ? Justifier par un calcul.

Exercice 4 – Étude complète : arrosage d'un potager

On relève la quantité d'eau y (en litres) nécessaire à l'arrosage d'un potager de surface x (en m²).

x	10	15	20	25	30	35
y	46	61	78	92	109	123

La calculatrice donne $a \approx 3{,}103$, $b \approx 15{,}019$ et $r \approx 0{,}9997$.

a) Calculer le point moyen.

b) Estimer la quantité d'eau pour 28 m², puis pour 50 m².

c) Interpréter les deux coefficients. La quantité d'eau est-elle proportionnelle à la surface ?

Exercice 5 – Étude complète : salaire et ancienneté

Le tableau donne le salaire mensuel y (en euros) de sept salariés en fonction de leur ancienneté x (en années).

x	0	2	5	8	12	16	20
y	1 700	1 790	1 930	2 060	2 250	2 410	2 580

La calculatrice donne $a \approx 44{,}141$, $b \approx 1\,705{,}587$ et $r \approx 0{,}9997$.

a) Calculer le point moyen et vérifier que la droite y passe.

b) Interpréter les deux coefficients.

c) Estimer le salaire d'un salarié ayant 25 ans d'ancienneté.

d) À partir de quelle ancienneté le salaire dépasserait-il 3 000 € ? Formuler une réserve.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Étude complète : boissons chaudes et température

Un distributeur relève ses ventes quotidiennes de boissons chaudes y en fonction de la température x (en °C).

x	-5	0	5	10	15	20	25
y	52	45	38	30	24	17	9

La calculatrice donne $a \approx -1{,}421$, $b \approx 44{,}929$ et $r \approx -0{,}9996$.

a) Commenter r et interpréter a.

b) Estimer les ventes pour une température de 12 °C.

c) Estimer les ventes pour une température de 30 °C, puis de 40 °C. Commenter.

Exercice 7 – Étude complète : révisions et résultats

Huit élèves indiquent leur temps de révision x (en heures) et leur note y (sur 20).

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y	4	6	7	9	12	13	15	16

La calculatrice donne $a \approx 1{,}786$, $b = 4$ et $r \approx 0{,}994$.

a) Calculer le point moyen et vérifier que la droite y passe.

b) Interpréter les deux coefficients.

c) Estimer la note d'un élève ayant révisé 4,5 heures.

d) À partir de combien d'heures le modèle donne-t-il une note supérieure à 20 ? Conclure sur son domaine de validité.

Exercice 8 – Étude complète : pluie et fréquentation

Un parc de loisirs relève, pour cinq journées, la pluviométrie x (en mm) et sa fréquentation y (en centaines de visiteurs).

x	20	40	60	80	100
y	12	9	7	4	2

La calculatrice donne $a = -0{,}125$, $b = 14{,}3$ et $r \approx -0{,}998$.

a) Calculer le point moyen et vérifier que la droite y passe.

b) Interpréter le coefficient a.

c) Estimer la fréquentation pour 70 mm de pluie.

d) Le modèle prévoit-il une fréquentation nulle ? Pour quelle pluviométrie ? Est-ce réaliste ?

Exercice 9 – Comparer deux séries par leur corrélation

Deux études sont menées sur le même produit.

Étude 1 : lien entre le budget publicitaire et les ventes, $r \approx 0{,}96$.

Étude 2 : lien entre le nombre de vendeurs et les ventes, $r \approx 0{,}62$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Pour laquelle des deux études un ajustement affine est-il justifié ?

b) Peut-on en conclure que la publicité est plus efficace que l'embauche de vendeurs ?

c) Que faudrait-il pour établir laquelle des deux actions est la plus rentable ?

Exercice 10 – Retrouver des données à partir de résumés

Une série de dix couples a pour point moyen $G(25\,;140)$, et sa droite de régression a pour coefficient directeur $a = 4{,}6$.

a) Déterminer l'ordonnée à l'origine b de la droite de régression.

b) Donner l'équation de la droite, puis estimer y pour $x = 30$.

c) La somme des x_i vaut-elle 250 ? Justifier.

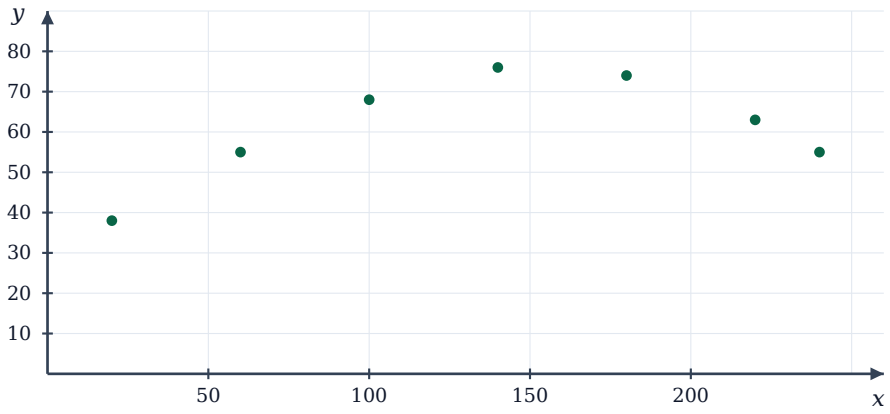
Exercice 11 – Un nuage à deux tendances

Le nuage ci-dessous donne le rendement y (en quintaux par hectare) d'une culture en fonction de la quantité d'engrais x (en kg/ha).

a) Décrire l'allure du nuage en une phrase.

b) Un ajustement affine sur l'ensemble du nuage est-il pertinent ? Justifier.

c) Que proposer à la place ?



Rendement (q/ha) en fonction de la quantité d'engrais (kg/ha).

Exercice 12 – Résidus et point mal ajusté

Une série de six couples est ajustée par la droite $y = 3x + 10$. Le tableau donne les valeurs observées.

x	1	2	3	4	5	6
y observé	13	15	20	22	32	28

a) Calculer les six valeurs estimées, puis les six résidus.

b) Quel point est le plus mal ajusté ? De combien ?

c) Que faut-il en conclure : erreur de relevé, point aberrant, ou modèle inadapté ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Deux variables, deux unités

Une série relie la masse x (en kg) d'un colis à son coût d'expédition y (en euros). L'ajustement donne

$$y = 1{,}35x + 4{,}20 \qquad \text{pour } x \in [0{,}5\,;\,20]$$

a) Estimer le coût d'expédition d'un colis de 12 kg.

b) Quelle masse peut-on expédier pour 20 € au maximum ?

c) Le coût est-il proportionnel à la masse ? Calculer le coût par kilogramme pour un colis de 1 kg, puis de 20 kg.

Exercice 14 – Lire un tableau de résultats complet

Le tableau ci-dessous résume une étude sur 15 communes : x est le nombre d'habitants (en milliers), y le nombre de commerces.

Grandeur	n	$\overline{x}$	$\overline{y}$	a	r
Valeur	15	8,4	63	6,85	0,91

a) Déterminer l'équation de la droite de régression.

b) Commenter r et interpréter a.

c) Estimer le nombre de commerces d'une commune de 12 milliers d'habitants, puis d'une commune de 500 milliers d'habitants. Commenter chaque estimation.

Exercice 15 – Synthèse finale : location de vélos en libre-service

Une ville suit le nombre de locations quotidiennes de vélos en libre-service, en milliers, depuis la mise en service du réseau.

Mois x	1	2	3	4	5	6	7	8
Locations y	2,1	2,6	3,2	3,6	4,3	4,8	5,2	5,9

a) Calculer les coordonnées du point moyen G.

b) Calculer les points moyens G_1 (quatre premiers mois) et G_2 (quatre derniers), puis l'équation de la droite de Mayer.

c) La calculatrice donne, pour la droite de régression, $a \approx 0{,}537$, $b \approx 1{,}546$ et $r \approx 0{,}999$. Vérifier que cette droite passe par G et comparer les deux ajustements.

d) Estimer le nombre de locations du dixième mois, puis du trentième. Préciser à chaque fois la nature de l'estimation.

e) Le réseau compte 6 000 vélos, et un vélo ne peut être loué plus de 5 fois par jour. Jusqu'à quel mois le modèle reste-t-il physiquement possible ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).