

Plaquette 1 – Définitions et vocabulaire

Suites numériques (introduction) — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. Une suite numérique (u_n) est une liste ordonnée de nombres. Le nombre placé au rang n se note u_n et se lit « u indice n ».

Rang et terme. n est le **rang** (un entier), u_n est le **terme** de rang n (un nombre quelconque). Le **premier terme** est u_0 quand la suite est définie à partir de 0, u_1 quand elle l'est à partir de 1.

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$$

△ Si la suite commence à u_0 , le terme u_3 est le **quatrième** de la liste.

Suite définie de façon explicite. Une formule donne le terme à partir du rang :

$$u_n = f(n)$$

On calcule u_5 en remplaçant n par 5 — sans avoir besoin des termes précédents.

Les deux questions inverses.

Question	Ce qu'on donne	Ce qu'on fait
calculer un terme	le rang n	on remplace n dans la formule
chercher un rang	la valeur u_n	on résout l'équation $u_n = \text{valeur}$

Un nombre est un **terme de la suite** seulement si l'équation a une solution **entière** acceptable.

Notation et vocabulaire. (u_n) (avec les parenthèses) désigne la **suite entière** ; u_n (sans parenthèses) désigne **un** nombre. On écrit $(u_n)_{n \geq 0}$ ou $(u_n)_{n \geq 1}$ pour préciser le rang de départ.

Modéliser. Dès qu'une grandeur est mesurée à intervalles réguliers (un mois, une semaine, une étape), on la note u_n où n compte les intervalles écoulés depuis le début : u_0 est alors la situation **initiale**.

Correction de l'exercice 1 – Lire un tableau de termes

Le tableau se lit en colonnes : la ligne du haut donne le **rang**, celle du bas le **terme** correspondant.

$$u_n = \text{la valeur écrite sous le rang } n$$

a) Sous $n = 0$ on lit 5, donc $u_0 = 5$. Sous $n = 3$ on lit 14, donc $u_3 = 14$.

b) On cherche cette fois dans la **ligne du bas** : la valeur 17 est écrite sous le rang 4, donc $17 = u_4$ et le rang cherché est 4.

c) Attention au décalage : la suite commence à u_0 , donc le premier terme est u_0 , le deuxième u_1 , le troisième u_2 et le **quatrième est** $u_3 = 14$. C'est l'erreur classique du début de chapitre.

d) On soustrait deux termes consécutifs : $u_5 - u_4 = 20 - 17 = 3$.

Ce qu'on remarque. On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours 3 : 5, 8, 11, 14... Cette régularité sera nommée plus loin dans le chapitre (suite arithmétique de

raison 3).

Réponse. a) $u_0 = 5$ et $u_3 = 14$ — b) rang 4 — c) $u_3 = 14$ — d) 3.

Correction de l'exercice 2 - Calculer quatre termes

La suite est définie de façon **explicite** : le terme se calcule directement à partir du rang, en remplaçant n par sa valeur dans la formule du cours.

$$u_n = 3n + 2$$

$$— u_0 = 3 \times 0 + 2 = 2 ;$$

$$— u_1 = 3 \times 1 + 2 = 5 ;$$

$$— u_5 = 3 \times 5 + 2 = 15 + 2 = 17 ;$$

$$— u_{10} = 3 \times 10 + 2 = 30 + 2 = 32.$$

L'avantage de l'écriture explicite. Pour obtenir u_{10} , on n'a eu besoin **d'aucun** des termes précédents : une seule substitution suffit. On pourrait de la même façon calculer $u_{1000} = 3002$ en une ligne.

Le piège de l'indice. u_{10} ne signifie pas $u \times 10$: l'indice repère la place du terme, il ne se multiplie pas. On écrit u_{10} et jamais $u10$ ni $u \cdot 10$.

Réponse. $u_0 = 2$, $u_1 = 5$, $u_5 = 17$ et $u_{10} = 32$.

Correction de l'exercice 3 - Vrai ou faux sur les rangs

Les questions a) et b) demandent un **calcul de terme** ; les questions c) et d) demandent une **recherche de rang**, donc la résolution d'une équation.

$$u_n = 4n - 1$$

a) **Faux.** $u_3 = 4 \times 3 - 1 = 11$, et non 3. Confondre le rang et le terme est précisément l'erreur à éviter.

b) **Vrai.** $u_0 = 4 \times 0 - 1 = -1$. Un terme peut parfaitement être négatif.

c) **Faux.** On résout $4n - 1 = 4$, soit $4n = 5$, donc $n = \frac{5}{4} = 1,25$. Ce rang n'est pas un entier : aucun terme de la suite ne vaut 4 (on a $u_1 = 3$ et $u_2 = 7$, la suite « saute » par-dessus 4).

d) **Vrai.** On résout $4n - 1 = 19$, soit $4n = 20$, donc $n = 5$. Comme 5 est un entier, 19 est bien un terme de la suite : c'est u_5 .

La rédaction attendue. Pour affirmer qu'un nombre est un terme, on **exhibe son rang** ; pour affirmer le contraire, on montre que l'équation n'a pas de solution entière.

Réponse. a) faux ($u_3 = 11$) — b) vrai — c) faux ($n = 1,25$ n'est pas entier) — d) vrai, $19 = u_5$.

Correction de l'exercice 4 - Une suite qui commence au rang 1

Ici le rang de départ est 1 et non 0 : c'est précisé par la notation $n \geq 1$.

$$v_n = \frac{100}{n}$$

a) Le premier terme est donc $v_1 = \frac{100}{1} = 100$.

b) $v_4 = \frac{100}{4} = 25$ et $v_{10} = \frac{100}{10} = 10$.

c) Au rang 0, la formule donnerait $\frac{100}{0}$: la division par zéro est impossible. C'est la raison pour laquelle l'énoncé impose $n \geq 1$; le domaine de définition d'une suite fait

partie de sa définition.

d) On résout $\frac{100}{n} = 8$, ce qui donne $n = \frac{100}{8} = 12,5$. Ce n'est pas un entier, donc 8 n'est pas un terme de la suite. En revanche $v_{12} \approx 8,33$ et $v_{13} \approx 7,69$: la suite passe de part et d'autre de 8 sans jamais l'atteindre.

À retenir. Toujours regarder à partir de quel rang la suite est définie avant de parler du « premier terme ».

Réponse. a) $v_1 = 100$ — b) $v_4 = 25$ et $v_{10} = 10$ — c) division par zéro interdite — d) non ($n = 12,5$).

Correction de l'exercice 5 - Chercher un rang

Chercher un rang, c'est résoudre une équation d'inconnue n , en n'acceptant que les solutions **entières positives**.

$$u_n = n^2 + 1$$

a) $n^2 + 1 = 50$ donne $n^2 = 49$, donc $n = 7$ ou $n = -7$. Le rang -7 n'existe pas : la seule solution est $n = 7$, et $u_7 = 50$.

b) $n^2 + 1 = 20$ donne $n^2 = 19$. Or $4^2 = 16$ et $5^2 = 25$: aucun carré d'entier ne vaut 19, donc 20 n'est pas un terme de la suite.

c) On cherche $n^2 + 1 > 100$, soit $n^2 > 99$. Comme $9^2 = 81 < 99$ et $10^2 = 100 > 99$, le plus petit rang convenable est $n = 10$, et l'on vérifie : $u_{10} = 101 > 100$ ✓ alors que $u_9 = 82 < 100$.

Le réflexe de contrôle. Quand on trouve un rang, on **revient à la formule** pour vérifier le terme obtenu : c'est un contrôle qui coûte une ligne et rattrape la plupart des erreurs de calcul.

Réponse. a) $n = 7$ — b) non, 19 n'est pas un carré parfait — c) $n = 10$ (avec $u_{10} = 101$).

Correction de l'exercice 6 - Une suite qui s'annule

a) On remplace n par 0, 1, 2, 3 puis 4 dans la formule :

$$u_n = n^2 - 5n + 6$$

- $u_0 = 0 - 0 + 6 = 6$;
- $u_1 = 1 - 5 + 6 = 2$;
- $u_2 = 4 - 10 + 6 = 0$;
- $u_3 = 9 - 15 + 6 = 0$;
- $u_4 = 16 - 20 + 6 = 2$.

b) D'après le calcul précédent, $u_2 = 0$ et $u_3 = 0$: la suite s'annule aux rangs 2 et 3. Une suite peut donc prendre deux fois la même valeur — ici la valeur 0 — sans être constante.

c) Les termes calculés sont tous positifs ou nuls. Pour $n \geq 4$, les valeurs repartent à la hausse ($u_4 = 2$, $u_5 = 6$, $u_6 = 12$). Aucun terme n'est négatif, car entre les deux rangs qui annulent l'expression il n'y a **aucun entier** : le trinôme n'est négatif que pour x strictement compris entre 2 et 3, et ces valeurs ne sont pas des rangs.

Le lien avec les fonctions. La fonction $x \mapsto x^2 - 5x + 6$ prend, elle, des valeurs négatives sur $]2; 3[$. Une suite ne « voit » que les abscisses entières : c'est la différence essentielle entre une suite et une fonction.

Réponse. a) 6, 2, 0, 0, 2 — b) rangs 2 et 3 — c) non, aucun entier ne rend l'expression négative.

Correction de l'exercice 7 - Des termes en fractions

a) On substitue le rang dans la formule du cours :

$$u_n = \frac{n}{n+1}$$

- $u_0 = \frac{0}{1} = 0$;
- $u_1 = \frac{1}{2} = 0,5$;
- $u_2 = \frac{2}{3} \approx 0,67$;
- $u_5 = \frac{5}{6} \approx 0,83$.

b) Plutôt que de comparer une fraction à 1 « à vue », on calcule la différence :

$$1 - u_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Comme $n \geq 0$, le dénominateur $n+1$ est strictement positif, donc $\frac{1}{n+1} > 0$. Ainsi $1 - u_n > 0$, c'est-à-dire $u_n < 1$ pour tout rang n .

Ce que la différence raconte en plus. L'écart entre u_n et 1 vaut exactement $\frac{1}{n+1}$: il devient aussi petit que l'on veut quand n grandit (0,001 au rang 999). Les termes s'accumulent sous 1 sans jamais l'atteindre.

Réponse. a) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}$ — b) $1 - u_n = \frac{1}{n+1} > 0$, donc $u_n < 1$.

Correction de l'exercice 8 - Le motif d'allumettes

a) Le premier carré coûte 4 allumettes, puis chaque carré ajouté en coûte 3 (les deux carrés partagent un côté) :

- $a_1 = 4$;
- $a_2 = 4 + 3 = 7$;
- $a_3 = 7 + 3 = 10$.

b) Pour n carrés, on paie une fois 4 allumettes puis 3 allumettes pour chacun des $n-1$ carrés suivants :

$$a_n = 4 + 3(n-1) = 3n + 1$$

On contrôle sur les valeurs connues : $a_1 = 3 + 1 = 4$ ✓ et $a_3 = 9 + 1 = 10$ ✓.

c) $a_{12} = 3 \times 12 + 1 = 37$ allumettes.

d) On cherche le rang tel que $a_n = 61$, soit $3n + 1 = 61$, donc $3n = 60$ et $n = 20$. Avec 61 allumettes on forme exactement 20 carrés.

Deux façons de compter, une seule formule. On peut aussi voir la file comme n « paquets » de 3 allumettes (un côté haut, un côté bas, un côté droit) plus l'allumette de gauche : $3n + 1$. Retrouver la même formule par un autre découpage est la meilleure des vérifications.

Réponse. a) 4, 7, 10 — b) $a_n = 3n + 1$ — c) 37 allumettes — d) 20 carrés.

Correction de l'exercice 9 - Abonnés d'une salle de sport

a) Le rang n compte les mois **écoulés depuis janvier** : s_0 est donc le nombre d'abonnés en janvier, soit $s_0 = 480$. Le rang 0 décrit toujours la situation initiale.

b) Six mois plus tard, la salle a gagné $6 \times 25 = 150$ abonnés : $s_6 = 480 + 150 = 630$. En

juillet, la salle compte 630 abonnés.

c) En n mois, le gain total est $25n$, d'où la formule explicite :

$$s_n = 480 + 25n$$

d) On résout l'inéquation $480 + 25n > 700$, soit $25n > 220$, donc $n > 8,8$. Le premier entier qui convient est $n = 9$: il faut 9 mois, c'est-à-dire **octobre**. On vérifie : $s_8 = 680$ (pas encore) et $s_9 = 705 > 700$ ✓.

Attention au sens de la réponse. L'inéquation donne $n > 8,8$; comme un rang est entier, on ne répond pas « 8,8 mois » mais bien « au bout de 9 mois ». C'est le passage obligé de tout problème de seuil.

Réponse. a) $s_0 = 480$, les abonnés de janvier — b) $s_6 = 630$ — c) $s_n = 480 + 25n$ — d) au bout de 9 mois, avec $s_9 = 705$.

Correction de l'exercice 10 - Une suite venue d'une fonction

a) Une suite définie par $u_n = f(n)$ se calcule en prenant l'image du rang :

$$u_n = f(n) = n^2 - 4n + 5$$

- $u_0 = 0 - 0 + 5 = 5$;
- $u_1 = 1 - 4 + 5 = 2$;
- $u_2 = 4 - 8 + 5 = 1$;
- $u_3 = 9 - 12 + 5 = 2$;
- $u_4 = 16 - 16 + 5 = 5$.

b) Les points à placer sont $(0 ; 5)$, $(1 ; 2)$, $(2 ; 1)$, $(3 ; 2)$ et $(4 ; 5)$. Ils sont **sur la courbe** de f , aux abscisses entières : la suite est la trace de la fonction sur les entiers. On ne relie pas ces points, car les rangs intermédiaires n'existent pas.

c) Non. La courbe atteint son minimum en $x = 2$, où $f(2) = 1$; comme 2 est justement un entier, le plus petit terme de la suite vaut 1 et aucun terme n'est inférieur à 1.

Le point de vigilance. Si le minimum de la fonction avait été atteint en $x = 2,5$, il n'aurait été **atteint par aucun terme** : le minimum d'une suite se lit sur les abscisses entières uniquement.

Réponse. a) 5, 2, 1, 2, 5 — b) points $(0 ; 5)$, $(1 ; 2)$, $(2 ; 1)$, $(3 ; 2)$, $(4 ; 5)$ sur la courbe — c) non, le plus petit terme est $u_2 = 1$.

Correction de l'exercice 11 - Termes de signes alternés

Le facteur $(-1)^n$ vaut 1 quand n est pair et -1 quand n est impair : il ne change que le **signe** du terme.

$$u_n = (-1)^n(n + 1)$$

a) On calcule rang par rang :

- $u_0 = 1 \times 1 = 1$;
- $u_1 = -1 \times 2 = -2$;
- $u_2 = 1 \times 3 = 3$;
- $u_3 = -1 \times 4 = -4$;
- $u_4 = 1 \times 5 = 5$.

b) Le rang 9 est impair, donc $(-1)^9 = -1$ et $u_9 = -(9 + 1) = -10$.

c) Pour que $u_n = 7$, il faut un terme positif, donc un rang **pair**, et $n + 1 = 7$, c'est-à-dire $n = 6$. Le rang 6 est bien pair : $u_6 = 7$, le nombre 7 est un terme de la suite.

Pour que $u_n = -7$, il faudrait un rang **impair** avec $n + 1 = 7$, donc $n = 6$: or 6 est pair. Impossible, -7 n'est pas un terme de la suite.

La méthode. Avec une alternance de signe, on traite toujours **deux cas** : rang pair et rang impair, puis on vérifie que le rang trouvé a bien la parité supposée.

Réponse. a) 1, -2 , 3, -4 , 5 — b) $u_9 = -10$ — c) $7 = u_6$ est un terme, -7 n'en est pas un.

Correction de l'exercice 12 - Les nombres triangulaires

a) On additionne les rangées successives :

- $t_1 = 1$;
- $t_2 = 1 + 2 = 3$;
- $t_3 = 3 + 3 = 6$;
- $t_4 = 6 + 4 = 10$.

b) La formule du cours donne le total sans faire l'addition :

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Au rang 4 : $\frac{4 \times 5}{2} = \frac{20}{2} = 10$, ce qui correspond bien au comptage ✓. Au rang 10 :

$$t_{10} = \frac{10 \times 11}{2} = 55 \text{ jetons.}$$

c) Passer du triangle à $n - 1$ rangées au triangle à n rangées revient à **ajouter une rangée**, et cette rangée contient exactement n jetons : d'où $t_n = t_{n-1} + n$, c'est-à-dire $t_n - t_{n-1} = n$.

Le sens de la formule. t_n est la somme $1 + 2 + \dots + n$ des n premiers entiers. Deux triangles identiques assemblés forment un rectangle de n sur $n + 1$ jetons, d'où le facteur $\frac{1}{2}$: c'est la démonstration attribuée à Gauss enfant.

Réponse. a) 1, 3, 6, 10 — b) $t_4 = 10$ ✓ et $t_{10} = 55$ — c) on ajoute une rangée de n jetons.

Correction de l'exercice 13 - Retrouver la formule explicite

La méthode est toujours la même : on compare chaque terme à son rang, en commençant par calculer les écarts entre termes consécutifs.

a) Les écarts valent 4 à chaque fois, et le terme de rang 0 vaut 3 : on ajoute 4 autant de fois que le rang l'indique.

$$u_n = 4n + 3$$

Vérification : $u_4 = 19$, ce qui prolonge bien la liste 3, 7, 11, 15, 19 ✓.

b) Les écarts ne sont plus constants : 3, 5, 7 — ils augmentent de 2, ce qui signale un carré. En essayant $(n + 1)^2$ on obtient 1, 4, 9, 16, soit exactement 1 de moins que les termes cherchés :

$$u_n = (n + 1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 2$$

Vérification : $u_4 = 25 + 1 = 26$, et l'écart avec 17 vaut 9, conforme à la progression des écarts ✓.

c) Le terme de rang 0 vaut 1, celui de rang 1 vaut $\frac{1}{2}$: le dénominateur est le rang augmenté de 1, donc $u_n = \frac{1}{n+1}$. Vérification : $u_4 = \frac{1}{5}$ ✓.

Honnêteté mathématique. Quelques termes ne **démontrent** jamais une formule : ils suggèrent une conjecture. On dit « une formule possible est... », et l'on vérifie

systématiquement sur un terme de plus.

Réponse. a) $u_n = 4n + 3$ — b) $u_n = n^2 + 2n + 2$ — c) $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Correction de l'exercice 14 - La croissance d'un plant

a) La hauteur initiale est 12 cm et l'on ajoute 2,5 cm par semaine écoulée :

$$h_n = 12 + 2,5n$$

b) $h_8 = 12 + 2,5 \times 8 = 12 + 20 = 32$ cm au bout de huit semaines.

c) On résout $12 + 2,5n > 40$, soit $2,5n > 28$, donc $n > 11,2$. Le premier rang entier est $n = 12$: le plant dépasse 40 cm au bout de 12 semaines. Contrôle : $h_{11} = 39,5$ cm (pas encore) et $h_{12} = 42$ cm ✓.

d) Le calcul est juste ($12 + 2,5 \times 200 = 512$), mais le résultat n'a aucun sens agronomique : un plant de tomate de 5,12 m n'existe pas. Le modèle **affine** décrit correctement les premières semaines de croissance, puis cesse d'être valable : la croissance ralentit et s'arrête.

Ce qu'un problème attend de vous. Donner le résultat du calcul **et** son domaine de validité. Un modèle n'est jamais vrai « pour tout n » dans la réalité, seulement sur la plage où il a été établi.

Réponse. a) $h_n = 12 + 2,5n$ — b) 32 cm — c) 12 semaines ($h_{12} = 42$ cm) — d) le modèle n'est plus valable si loin.

Correction de l'exercice 15 - Trois suites à comparer

a) On substitue chaque rang dans les trois formules :

n	0	1	2	3
$u_n = 2n + 1$	1	3	5	7
$v_n = n^2$	0	1	4	9
$w_n = 30 - 3n$	30	27	24	21

b) Le tableau montre que v_n reste en dessous de u_n jusqu'au rang 2 ($4 < 5$), puis passe au-dessus au rang 3 ($9 > 7$). On le confirme en étudiant la différence :

$$v_n - u_n = n^2 - 2n - 1$$

Au rang 2 elle vaut $-1 < 0$, au rang 3 elle vaut $2 > 0$, et elle continue de croître ensuite ($n = 4$ donne 7, $n = 5$ donne 14). Donc $v_n > u_n$ à partir du rang 3.

c) On résout $30 - 3n = 0$, soit $3n = 30$ et $n = 10$: la suite (w_n) s'annule au rang 10. Au-delà, les termes deviennent négatifs ($w_{11} = -3$, $w_{12} = -6$). Rien ne l'interdit mathématiquement ; en revanche, si w_n modélisait un stock ou un effectif, le modèle cesserait d'avoir un sens à partir du rang 11.

Comparer deux suites. On n'affirme jamais un ordre sur la foi de trois valeurs : on étudie la **différence** $v_n - u_n$ et son signe.

Réponse. a) u : 1, 3, 5, 7 ; v : 0, 1, 4, 9 ; w : 30, 27, 24, 21 — b) à partir du rang 3 — c) $w_{10} = 0$, puis termes négatifs.