

Plaquette 2 – Modes de génération

Suites numériques (introduction) — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Mode explicite. Une formule en fonction du rang :

$$u_n = f(n)$$

On obtient u_{100} en une substitution, sans calculer les termes précédents.

Mode récurrent. Un premier terme et une relation de passage :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Pour obtenir u_{100} , il faut enchaîner les 100 calculs : c'est là qu'interviennent le tableur et la programmation.

Ne pas confondre. u_{n+1} est le terme **suivant** ; $u_n + 1$ est le terme u_n augmenté de 1. Une parenthèse mal placée change tout l'exercice.

Deux relations de récurrence à reconnaître.

Relation	Nom	Forme explicite
$u_{n+1} = u_n + r$	arithmétique, raison r	$u_n = u_0 + nr$
$u_{n+1} = q \times u_n$	géométrique, raison q	$u_n = u_0 \times q^n$

Une relation de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ (avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$) n'est ni l'une ni l'autre : on la calcule pas à pas.

Au tableur. Si u_0 est en B2, on saisit en B3 la traduction de la relation (par exemple $= B2 \times 0,95 + 10$), puis on recopie la formule vers le bas.

En Python. Une boucle qui écrase la variable à chaque tour calcule le terme de rang n :

```
u = 5
for k in range(10):
    u = 0.9 * u + 2
print(u)
```

Le contrôle. Après un calcul de récurrence, on vérifie le **sens** de l'évolution attendu (les termes montent-ils ou descendent-ils ?) : une erreur de signe ou de touche se repère immédiatement.

Correction de l'exercice 1 – Une récurrence additive

La relation de récurrence se lit : « le terme suivant est le terme actuel augmenté de 4 ».

$$u_{n+1} = u_n + 4$$

On part du premier terme et on applique la règle, un rang à la fois :

- $u_1 = u_0 + 4 = 5 + 4 = 9$;
- $u_2 = u_1 + 4 = 9 + 4 = 13$;
- $u_3 = u_2 + 4 = 13 + 4 = 17$;

$$— u_4 = u_3 + 4 = 17 + 4 = 21.$$

Pourquoi dans l'ordre. Impossible de calculer u_4 sans connaître u_3 : c'est la contrainte du mode récurrent. On ne saute pas de rang.

La rédaction attendue. On écrit la relation avec les indices avant de remplacer ($u_2 = u_1 + 4$), et non seulement la suite des nombres : c'est ce qui prouve qu'on a appliqué la définition.

Réponse. $u_1 = 9$, $u_2 = 13$, $u_3 = 17$, $u_4 = 21$.

Correction de l'exercice 2 - Une récurrence multiplicative

a) La règle de passage multiplie le terme par 3 à chaque étape :

$$v_{n+1} = 3v_n$$

$$\begin{aligned} — v_1 &= 3 \times 2 = 6 ; \\ — v_2 &= 3 \times 6 = 18 ; \\ — v_3 &= 3 \times 18 = 54 ; \\ — v_4 &= 3 \times 54 = 162. \end{aligned}$$

Les cinq premiers termes sont donc 2, 6, 18, 54 et 162.

b) On compare les deux termes par un quotient : $\frac{v_4}{v_0} = \frac{162}{2} = 81$. Le terme de rang 4 est 81 fois plus grand que le terme initial.

Le lien avec les puissances. Multiplier quatre fois de suite par 3, c'est multiplier par $3^4 = 81$: on retrouve le facteur obtenu. C'est le point de départ de l'écriture explicite $v_n = 2 \times 3^n$, que la plaquette exploite plus loin.

Réponse. a) 2, 6, 18, 54, 162 — b) 81 fois plus grand, soit 3^4 .

Correction de l'exercice 3 - Une récurrence affine

a) Chaque étape enchaîne **deux** opérations : une multiplication, puis une addition. On respecte l'ordre.

$$w_{n+1} = 0,8w_n + 10$$

$$\begin{aligned} — w_1 &= 0,8 \times 100 + 10 = 80 + 10 = 90 ; \\ — w_2 &= 0,8 \times 90 + 10 = 72 + 10 = 82 ; \\ — w_3 &= 0,8 \times 82 + 10 = 65,6 + 10 = 75,6 ; \\ — w_4 &= 0,8 \times 75,6 + 10 = 60,48 + 10 = 70,48. \end{aligned}$$

b) Les termes diminuent : 100, 90, 82, 75,6, 70,48. Mais les baisses successives s'atténuent (−10, puis −8, puis −6,4, puis −5,12) : la descente ralentit.

Le piège de la calculatrice. Il faut multiplier **puis** ajouter, et surtout repartir du terme précédent **non arrondi**. Si l'on avait arrondi w_3 à 76, on obtiendrait $w_4 = 70,8$ au lieu de 70,48 : l'erreur d'arrondi se propage et grossit à chaque rang.

Réponse. a) $w_1 = 90$, $w_2 = 82$, $w_3 = 75,6$, $w_4 = 70,48$ — b) ils descendent, de moins en moins vite.

Correction de l'exercice 4 - Deux écritures, une seule suite

a) Pour (a_n) , on substitue le rang dans la formule explicite :

$$a_n = 2n + 3$$

On obtient $a_0 = 3$, $a_1 = 5$, $a_2 = 7$, $a_3 = 9$, $a_4 = 11$.

Pour (b_n) , on part de $b_0 = 3$ et on ajoute 2 à chaque rang : $b_1 = 5$, $b_2 = 7$, $b_3 = 9$, $b_4 = 11$.

b) Les termes coïncident : on conjecture que les deux suites sont la même, c'est-à-dire que $a_n = b_n$ pour tout n . C'est cohérent, car ajouter 2 à chaque rang à partir de 3 revient bien à calculer $3 + 2n$.

c) Le mode **explicite** l'emporte largement : $a_{50} = 2 \times 50 + 3 = 103$ en une ligne, alors que le mode récurrent demanderait 50 additions successives.

Ce qu'il faut retenir. Une même suite peut avoir les deux écritures. L'explicite sert à atteindre un rang lointain ; la récurrence décrit mieux le **mécanisme** d'évolution (« chaque mois, on ajoute 2 »).

Réponse. a) 3, 5, 7, 9, 11 pour les deux — b) les deux suites sont égales — c) l'explicite, $a_{50} = 103$ en une substitution.

Correction de l'exercice 5 - Remonter d'un terme à l'autre

a) On applique la relation du cours en respectant l'ordre des opérations :

$$u_{n+1} = 2u_n - 3$$

- $u_1 = 2 \times 5 - 3 = 7$;
- $u_2 = 2 \times 7 - 3 = 11$;
- $u_3 = 2 \times 11 - 3 = 19$.

b) La relation lie u_5 à u_4 par $u_5 = 2u_4 - 3$. C'est une équation d'inconnue u_4 :

$$2u_4 - 3 = 67$$

donc $2u_4 = 70$ et $u_4 = 35$. On contrôle en repartant en avant : $2 \times 35 - 3 = 67$ ✓.

Le sens de lecture. Une relation de récurrence se lit d'habitude vers l'avant, mais rien n'empêche de la résoudre vers l'arrière : on remonte d'un rang en résolvant une équation. C'est possible ici parce que la fonction $x \mapsto 2x - 3$ est inversible.

Réponse. a) $u_1 = 7$, $u_2 = 11$, $u_3 = 19$ — b) $u_4 = 35$.

Correction de l'exercice 6 - Vers une valeur limite

a) On applique la relation, terme après terme :

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 3$$

- $u_1 = 0,5 \times 20 + 3 = 13$;
- $u_2 = 0,5 \times 13 + 3 = 9,5$;
- $u_3 = 0,5 \times 9,5 + 3 = 7,75$;
- $u_4 = 0,5 \times 7,75 + 3 = 6,875$.

b) Si $u_n = 6$, alors $u_{n+1} = 0,5 \times 6 + 3 = 3 + 3 = 6$: le terme suivant est identique. La valeur 6 est **stable** pour cette relation.

c) Les termes descendent (20, 13, 9,5, 7,75, 6,875) en se rapprochant de 6, et chaque écart à 6 est divisé par deux : 14, puis 7, puis 3,5, puis 1,75, puis 0,875. On conjecture que les termes se rapprochent indéfiniment de 6 sans jamais l'atteindre.

Comment trouver la valeur stable. On cherche le nombre x qui ne bouge pas, en résolvant $x = 0,5x + 3$, soit $0,5x = 3$ et $x = 6$. Cette valeur sera appelée limite en terminale.

Réponse. a) 13 ; 9,5 ; 7,75 ; 6,875 — b) $0,5 \times 6 + 3 = 6$ — c) les termes se rapprochent de 6.

Correction de l'exercice 7 - De la récurrence à l'explicite : cas additif

a) On retire 3 à chaque rang : $u_1 = 4$, $u_2 = 1$, $u_3 = -2$. Les quatre premiers termes sont 7, 4, 1, -2.

b) On ajoute toujours le même nombre $r = -3$: la suite est **arithmétique de raison** -3, et l'on applique la formule du cours :

$$u_n = u_0 + n \times r$$

Ici $u_0 = 7$ et $r = -3$, donc $u_n = 7 - 3n$.

Contrôle sur un terme déjà connu : $u_3 = 7 - 9 = -2$ ✓.

c) Avec l'écriture explicite, le rang 30 ne demande qu'une substitution :

$$u_{30} = 7 - 3 \times 30 = 7 - 90 = -83.$$

Pourquoi la raison est négative. « Retirer 3 » s'écrit « ajouter -3 » : la raison d'une suite arithmétique peut être négative, et c'est ce signe qui fera descendre la suite dans la plaquette suivante.

Réponse. a) 7, 4, 1, -2 — b) $u_n = 7 - 3n$ — c) $u_{30} = -83$.

Correction de l'exercice 8 - De la récurrence à l'explicite : cas multiplicatif

a) Augmenter de 3 % revient à multiplier par le coefficient multiplicateur $1 + \frac{3}{100} = 1,03$.

D'une année à la suivante, le capital est donc multiplié par 1,03, ce qui s'écrit

$$c_{n+1} = 1,03 c_n, \text{ avec } c_0 = 1\,500.$$

b) On multiplie toujours par le même nombre : la suite est **géométrique de raison** $q = 1,03$, et la formule du cours donne

$$c_n = c_0 \times q^n$$

soit $c_n = 1\,500 \times 1,03^n$.

$$\text{c) } c_{10} = 1\,500 \times 1,03^{10} \approx 1\,500 \times 1,343916 \approx 2\,015,87 \text{ €}.$$

Le piège classique. Le capital n'augmente pas de $3 \times 10 = 30$ % en dix ans, mais d'environ 34,4 % : les intérêts produisent eux-mêmes des intérêts. Multiplier dix fois par 1,03 n'est pas ajouter dix fois 3 %.

Réponse. a) coefficient multiplicateur 1,03 — b) $c_n = 1\,500 \times 1,03^n$ — c) environ 2 015,87 €.

Correction de l'exercice 9 - De l'explicite à la récurrence

a) $u_0 = 5 \times 0 + 2 = 2$ et $u_1 = 5 \times 1 + 2 = 7$.

b) Le terme de rang $n + 1$ s'obtient en remplaçant n par $n + 1$ dans la formule — c'est le geste à connaître :

$$u_{n+1} = 5(n+1) + 2 = 5n + 5 + 2 = 5n + 7$$

Or $u_n = 5n + 2$, donc $u_{n+1} - u_n = (5n + 7) - (5n + 2) = 5$. Autrement dit $u_{n+1} = u_n + 5$ pour tout entier n .

c) La suite peut donc se définir par récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$$

L'erreur à ne pas commettre. u_{n+1} ne s'obtient pas en ajoutant 1 au résultat : on remplace n par $n + 1$ **partout** dans la formule, parenthèses comprises. Écrire $5n + 1 + 2$ au lieu de $5(n + 1) + 2$ fausse tout l'exercice.

Réponse. a) $u_0 = 2$, $u_1 = 7$ — b) $u_{n+1} = 5n + 7 = u_n + 5$ — c) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 5$.

Correction de l'exercice 10 - Lire un programme Python

a) La variable u contient le terme courant. Elle vaut 5 avant la boucle, et chaque tour la remplace par $0,9 \times u + 2$: le programme calcule la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 0,9 u_n + 2 \end{cases}$$

b) La boucle *for k in range(10)* effectue 10 tours, donc 10 passages du terme au suivant : la variable contient u_{10} au moment de l'affichage.

c) En déroulant les dix étapes : 6,5 ; 7,85 ; 9,065 ; 10,1585 ; 11,14265 ; 12,028385 ; 12,8255465 ; 13,542992 ; 14,188693 ; 14,769823. La valeur affichée est environ 14,77.

Le point qui fait toute la différence. L'instruction de la boucle remplace u par $0,9 u + 2$: elle **écrase** l'ancienne valeur : à chaque tour, une seule variable suffit, et l'on ne conserve pas les termes précédents. Si l'on veut tous les termes, on ajoute *print(u)* à l'intérieur de la boucle.

Réponse. a) $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 0,9 u_n + 2$ — b) le terme u_{10} — c) environ 14,77.

Correction de l'exercice 11 - Une formule de tableur

a) La cellule B3 doit contenir la traduction de la relation de récurrence, en désignant le terme précédent par sa cellule : $= 0,95 \times B2 + 10$. Recopiée vers le bas, elle devient $= 0,95 \times B3 + 10$ en B4, et ainsi de suite : la référence relative suit la descente.

b) On applique la relation du cours :

$$p_{n+1} = 0,95 p_n + 10$$

- $p_1 = 0,95 \times 300 + 10 = 285 + 10 = 295$;
- $p_2 = 0,95 \times 295 + 10 = 280,25 + 10 = 290,25$;
- $p_3 = 0,95 \times 290,25 + 10 = 275,7375 + 10 = 285,7375$.

c) Si un terme vaut 200, le suivant vaut $0,95 \times 200 + 10 = 190 + 10 = 200$: la valeur ne change plus. On la retrouve en résolvant $x = 0,95x + 10$, soit $0,05x = 10$ et $x = 200$.

Ce que le tableur ne dit pas. Il affiche des valeurs arrondies mais calcule avec toutes les décimales. Pour juger d'une stabilisation, on regarde la colonne sur plusieurs dizaines de lignes, jamais sur trois.

Réponse. a) $= 0,95 \times B2 + 10$ — b) 295 ; 290,25 ; 285,7375 — c) $0,95 \times 200 + 10 = 200$.

Correction de l'exercice 12 - Atteindre un seuil

a) Il reste 85 % des bactéries d'une heure à la suivante, donc on multiplie par le coefficient multiplicateur 0,85 :

$$b_{n+1} = 0,85 b_n \quad \text{avec } b_0 = 1\,000$$

b) On calcule les termes successifs jusqu'à franchir le seuil :

- $b_1 = 0,85 \times 1\,000 = 850$;
- $b_2 = 0,85 \times 850 = 722,5$;
- $b_3 = 0,85 \times 722,5 \approx 614,1$;
- $b_4 \approx 522,0$;
- $b_5 \approx 443,7$.

Le seuil est franchi au rang 5 : il faut 5 **heures** pour que la colonie passe sous 500 bactéries. On répond bien avec le premier rang qui vérifie l'inégalité, en donnant les

deux termes qui l'encadrent : $b_4 \approx 522 > 500$ et $b_5 \approx 444 < 500$.

Un détail qui compte. Les nombres 722,5 ou 443,7 ne sont pas des effectifs réels : ce sont les valeurs du modèle. On ne les arrondit pas en cours de calcul, on arrondit seulement la réponse finale et l'on interprète.

Réponse. a) $b_{n+1} = 0,85 b_n$ avec $b_0 = 1\,000$ — b) au bout de 5 heures ($b_5 \approx 444$).

Correction de l'exercice 13 - Deux termes pour en faire un troisième

a) Chaque terme est la somme des **deux** précédents :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

En partant de $F_1 = 1$ et $F_2 = 1$: $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$, $F_6 = 8$, $F_7 = 13$, $F_8 = 21$, $F_9 = 34$, $F_{10} = 55$.

b) Les suites précédentes reliaient un terme au seul terme précédent. Ici, il faut **deux** termes pour démarrer et deux termes pour calculer le suivant : c'est une récurrence dite double. Un seul terme initial ne suffirait pas à déterminer la suite.

c) $\frac{F_{10}}{F_9} = \frac{55}{34} \approx 1,618$.

Ce que ce quotient annonce. Les quotients de deux termes consécutifs se rapprochent du nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$. C'est une propriété classique de cette suite, qu'on démontre après le chapitre sur les limites.

Réponse. a) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 — b) il faut deux termes initiaux — c) environ 1,618.

Correction de l'exercice 14 - Le bassin de rétention

a) Perdre 8 % du volume, c'est en conserver 92 %, donc multiplier par 0,92 ; on ajoute ensuite les 40 m³ déversés. D'où la relation :

$$v_{n+1} = 0,92 v_n + 40 \quad \text{avec } v_0 = 300$$

b) On enchaîne les calculs sans arrondir en route :

- $v_1 = 0,92 \times 300 + 40 = 276 + 40 = 316$;
- $v_2 = 0,92 \times 316 + 40 = 290,72 + 40 = 330,72$;
- $v_3 = 0,92 \times 330,72 + 40 \approx 304,26 + 40 = 344,26$.

c) Le coefficient 0,92 décrit une évolution **proportionnelle** au volume présent : plus le bassin est plein, plus la perte en mètres cubes est grande. Le terme +40 décrit un apport **fixe**, indépendant du volume.

L'ordre des opérations reflète l'énoncé. L'infiltration porte sur le volume du matin, le déversement s'ajoute ensuite : on multiplie d'abord, on additionne après. Inverser les deux donnerait une autre suite.

Réponse. a) conserver 92 % puis ajouter 40 — b) 316 ; 330,72 ; environ 344,26 m³ — c) 0,92 = perte proportionnelle, +40 = apport fixe.

Correction de l'exercice 15 - Épargne avec versements

a) Les intérêts multiplient le capital par 1,02, puis le versement ajoute 300 € :

$$c_{n+1} = 1,02 c_n + 300 \quad \text{avec } c_0 = 2\,000$$

b) On applique la relation année après année :

— $c_1 = 1,02 \times 2\,000 + 300 = 2\,040 + 300 = 2\,340$ € ;

- $c_2 = 1,02 \times 2\,340 + 300 = 2\,386,80 + 300 = 2\,686,80 \text{ €}$;
- $c_3 = 1,02 \times 2\,686,80 + 300 = 2\,740,536 + 300 \approx 3\,040,54 \text{ €}$.

c) La formule $c_n = c_0 \times q^n$ ne vaut que pour une suite **géométrique**, c'est-à-dire lorsqu'on multiplie uniquement par un même nombre. Ici s'ajoute un versement fixe de 300 € : la suite n'est ni arithmétique (on ne multiplie pas par 1) ni géométrique (on n'ajoute pas 0).

d) Puisqu'aucune formule explicite n'est disponible à ce niveau, on enchaîne les 15 calculs — au tableur en recopiant $= 1,02 \times B2 + 300$, ou en Python avec une boucle de 15 tours. On trouve alors $c_{15} \approx 7\,879,76 \text{ €}$.

La bonne habitude. Avant de chercher une formule, on identifie le type de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$, $u_{n+1} = qu_n$, ou $u_{n+1} = au_n + b$. Seules les deux premières ont une formule explicite au programme de première.

Réponse. a) $c_{n+1} = 1,02c_n + 300$, $c_0 = 2\,000$ — b) 2 340 €, 2 686,80 €, environ 3 040,54 € — c) suite ni arithmétique ni géométrique — d) au tableur ou par une boucle.