

Plaquette 4 - Représentations graphiques

Suites numériques (introduction) — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Représentation d'une suite. On place les points

$$M_n(n; u_n)$$

le rang n en abscisse, le terme u_n en ordonnée. On obtient un **nuage de points**.

△ **On ne relie jamais les points** par une courbe : les rangs sont des entiers, il n'existe pas de terme « $u_{2,5}$ ». Un trait fin en pointillé est toléré pour guider l'œil, jamais comme tracé de la suite.

Ce que le graphique montre immédiatement.

Sur le dessin	Ce que cela signifie
les points montent	suite croissante
les points descendent	suite décroissante
les points montent puis descendent	suite non monotone
les points sont alignés	suite arithmétique
les points s'écartent de plus en plus	croissance accélérée (géométrique)
les points se resserrent vers une hauteur	stabilisation vers une valeur

Suite arithmétique et alignement. Si $u_n = u_0 + nr$, les points sont **alignés** sur la droite d'équation $y = rx + u_0$: la raison r est le coefficient directeur.

Lire un seuil. Pour résoudre graphiquement $u_n > s$, on trace la droite horizontale d'équation $y = s$ et l'on repère les points situés **au-dessus** : leurs abscisses donnent les rangs cherchés.

Suite et fonction. Si $u_n = f(n)$, les points du nuage sont exactement les points de la courbe de f d'abscisses entières.

La rédaction. Une lecture graphique se donne toujours comme telle : « graphiquement, $u_3 \approx 5,5$ ». Un résultat lu n'est pas un résultat démontré.

Correction de l'exercice 1 - Placer les premiers points

a) On substitue le rang dans la formule :

$$u_n = 2n + 1$$

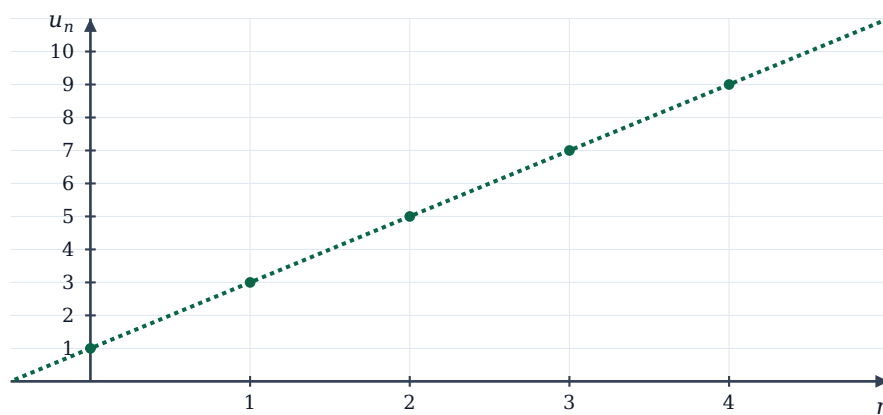
On obtient $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7$ et $u_4 = 9$.

b) Les points à placer sont $(0; 1)$, $(1; 3)$, $(2; 5)$, $(3; 7)$ et $(4; 9)$: le **rang en abscisse**, le **terme en ordonnée**. La figure du corrigé les montre.

c) Les cinq points sont alignés. C'est normal : la formule est affine, et les points appartiennent tous à la droite d'équation $y = 2x + 1$, de coefficient directeur 2 — c'est-à-dire la raison de la suite. En allant d'un point au suivant, on avance de 1 et on monte de 2.

Le geste à ne pas faire. Relier les points par un trait plein reviendrait à prétendre que la suite a une valeur entre deux rangs. Une suite ne vit que sur les entiers : on laisse le nuage tel quel.

Réponse. a) 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 — b) points $(0; 1)$ à $(4; 9)$ — c) ils sont alignés sur la droite $y = 2x + 1$.



Les cinq premiers points de la suite, alignés sur la droite $y = 2x + 1$.

Correction de l'exercice 2 - Lire un nuage de points

a) On lit l'ordonnée du point situé à l'abscisse voulue :

$$u_n = \text{ordonnée du point d'abscisse } n$$

Graphiquement, $u_0 = 12$, $u_2 = 8$ et $u_5 = 8$. Deux rangs différents peuvent donner le même terme : rien ne l'interdit.

b) Aucun point n'a pour ordonnée 9 : les termes lus valent 12, 10, 8, 6, 6, 8, 12. Le nombre 9 n'est donc pas un terme de la suite sur les rangs représentés.

c) Les points descendent du rang 0 au rang 3, restent à la même hauteur entre les rangs 3 et 4, puis remontent jusqu'au rang 6. La suite n'est donc pas monotone : elle décroît, marque un palier, puis croît. Son plus petit terme visible vaut 6, atteint deux fois.

Attention à la question b). Elle demandait un **rang**, c'est-à-dire une abscisse : on cherche donc un point à la hauteur 9, et l'on constate qu'il n'y en a pas. Répondre « u_9 » serait confondre le rang et le terme.

Réponse. a) $u_0 = 12$, $u_2 = 8$, $u_5 = 8$ — b) aucun : 9 n'est pas un terme — c) décroissante jusqu'au rang 3, palier, puis croissante.

Correction de l'exercice 3 - Des points alignés

a) Des points alignés signalent une suite **arithmétique** : l'écart entre deux termes consécutifs est constant, exactement comme le coefficient directeur d'une droite est

constant.

b) Entre les rangs 0 et 4, on avance de 4 rangs et le terme augmente de $17 - 5 = 12$. La raison est donc

$$r = \frac{u_4 - u_0}{4 - 0} = \frac{12}{4} = 3$$

c) Avec la formule du cours d'une suite arithmétique :

$$u_n = u_0 + nr = 5 + 3n$$

Les points sont portés par la droite d'équation $y = 3x + 5$: son coefficient directeur est la raison 3, son ordonnée à l'origine est le premier terme 5.

Le contrôle. On vérifie sur la donnée de départ : $u_4 = 5 + 3 \times 4 = 17 \checkmark$. Et les termes intermédiaires $u_1 = 8$, $u_2 = 11$, $u_3 = 14$ progressent bien de 3 en 3.

Réponse. a) arithmétique (points alignés) — b) $r = 3$ — c) $u_n = 5 + 3n$, droite $y = 3x + 5$.

Correction de l'exercice 4 - Des points qui s'écartent

a) On multiplie par 1,5 à chaque rang :

$$v_n = 2 \times 1,5^n$$

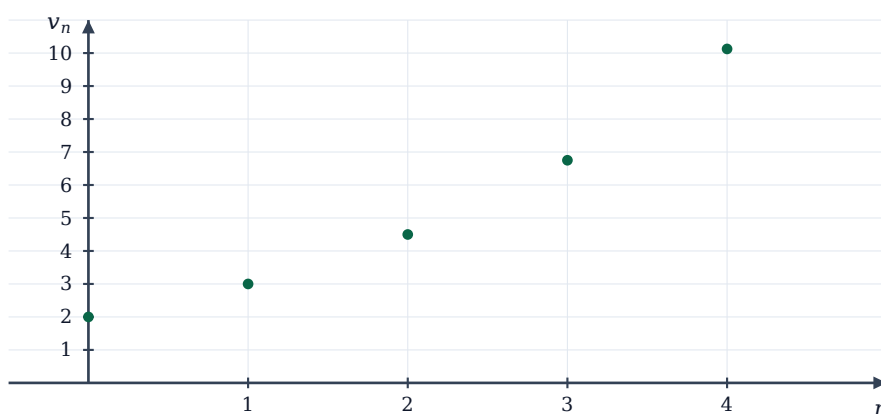
$v_0 = 2$; $v_1 = 3$; $v_2 = 4,5$; $v_3 = 6,75$; $v_4 \approx 10,13$.

b) Non. Pour des points alignés, il faudrait un écart constant entre deux termes consécutifs. Or les écarts valent 1 ; 1,5 ; 2,25 ; 3,375 : ils augmentent. Les points ne sont donc pas alignés.

c) Le nuage monte de plus en plus vite : les points s'écartent verticalement les uns des autres. C'est la signature d'une suite **géométrique** de raison supérieure à 1, où c'est le **quotient** qui est constant (1,5), et non la différence.

La comparaison utile. Une suite arithmétique dessine une droite ; une suite géométrique de raison $q > 1$ dessine une courbe qui s'envole. À l'œil, c'est la meilleure façon de distinguer les deux sur un graphique.

Réponse. a) 2 ; 3 ; 4,5 ; 6,75 ; environ 10,13 — b) non, les écarts augmentent (1 ; 1,5 ; 2,25...) — c) croissance de plus en plus rapide, typique d'une suite géométrique.



Les points s'écartent de plus en plus : la croissance est géométrique.

Correction de l'exercice 5 - Franchir un seuil graphiquement

a) On repère les points situés **au-dessus** de la droite horizontale. Le point d'abscisse 7 est à la hauteur 19, donc sous le seuil ; le point d'abscisse 8 est à la hauteur 22, donc au-dessus. Graphiquement, le plus petit rang cherché est $n = 8$.

b) Le calcul confirme la lecture. On résout l'inéquation :

$$3n - 2 > 20$$

soit $3n > 22$, donc $n > \frac{22}{3} \approx 7,33$. Comme un rang est un entier, le plus petit qui convienne est $n = 8$, et $u_8 = 22 > 20$ ✓ alors que $u_7 = 19 < 20$.

Pourquoi faire les deux. Le graphique donne la réponse en trois secondes mais reste une lecture ; le calcul la démontre. Dans un devoir, on annonce la lecture puis on la justifie — et si les deux ne concordent pas, c'est qu'il y a une erreur à chercher.

Réponse. a) graphiquement $n = 8$ — b) $3n - 2 > 20$ donne $n > 7,33$, donc $n = 8$ ($u_8 = 22$).

Correction de l'exercice 6 - Représenter une suite récurrente

a) On ajoute 3 à chaque rang à partir de $u_0 = 1$:

$$u_{n+1} = u_n + 3$$

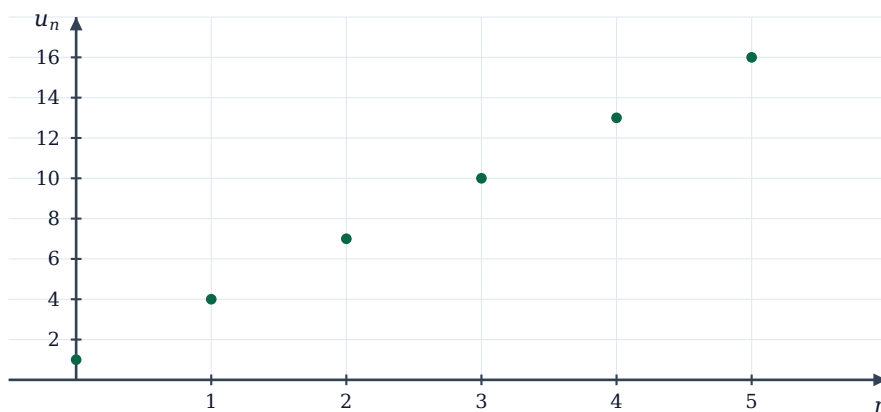
Les six premiers termes sont 1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16.

b) On place les points (0 ; 1), (1 ; 4), (2 ; 7), (3 ; 10), (4 ; 13) et (5 ; 16). Ils sont alignés : d'un point au suivant, on avance de 1 et on monte de 3.

c) L'alignement signifie que la suite est arithmétique de raison 3, donc portée par la droite d'équation $y = 3x + 1$. En prolongeant cette droite jusqu'à l'abscisse 20, on lit l'ordonnée 61, ce que le calcul confirme : $u_{20} = 1 + 3 \times 20 = 61$.

L'intérêt du graphique. Il transforme une définition « pas à pas » en une image globale : l'alignement se voit, et il donne la formule explicite sans autre calcul.

Réponse. a) 1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13 ; 16 — b) points alignés sur $y = 3x + 1$ — c) en prolongeant la droite : $u_{20} = 61$.



Six points alignés : la suite est arithmétique de raison 3.

Correction de l'exercice 7 - Un nuage en zigzag

a) On lit les ordonnées des premiers points : $u_0 = 4$, $u_1 = -4$, $u_2 = 4$ et $u_3 = -4$.

b) Non. Il suffit d'exhiber deux différences de signes contraires :

$$u_1 - u_0 = -8 < 0 \quad \text{et} \quad u_2 - u_1 = 8 > 0$$

La suite descend puis remonte : elle n'est ni croissante ni décroissante. Un seul contre-exemple suffit, il est inutile d'examiner tous les rangs.

c) Les termes valent 4 aux rangs pairs et -4 aux rangs impairs : le facteur $(-1)^n$ produit exactement cette alternance, d'où la formule $u_n = 4 \times (-1)^n$. On vérifie : $u_0 = 4$ ✓, $u_1 = -4$ ✓, $u_2 = 4$ ✓.

Comment la reconnaître. Un nuage qui saute entre deux hauteurs symétriques par rapport à l'axe des abscisses signale presque toujours un facteur $(-1)^n$.

Réponse. a) 4 ; -4 ; 4 ; -4 — b) non, $u_1 - u_0 = -8$ et $u_2 - u_1 = 8$ — c) $u_n = 4 \times (-1)^n$.

Correction de l'exercice 8 - Une suite en diagramme en barres

a) On lit la hauteur des barres : $p_0 = 24$, $p_3 = 30$ et $p_5 = 33$ (en centaines de prêts).

b) La barre la plus haute est celle de rang 5 : juin, avec 3 300 prêts. La plus basse est celle de rang 1 : février, avec 2 100 prêts.

c) On applique la formule du taux d'évolution vue au chapitre précédent :

$$t = \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100$$

Ici $V_D = 24$ et $V_A = 33$, d'où $t = \frac{33 - 24}{24} = \frac{9}{24} = 0,375$, soit une hausse de 37,5 % entre janvier et juin.

Nuage ou barres ? Le nuage de points met en valeur l'évolution rang par rang ; le diagramme en barres met en valeur la **comparaison** des valeurs entre elles. On choisit selon ce que l'on veut faire voir — les deux représentent la même suite.

Réponse. a) $p_0 = 24$, $p_3 = 30$, $p_5 = 33$ (centaines) — b) maximum en juin, minimum en février — c) +37,5 %.

Correction de l'exercice 9 - Ce point appartient-il au nuage ?

Un point $(a ; b)$ appartient au nuage si a est un **rang entier** et si $b = u_a$.

$$M(a ; b) \in \text{nuage} \Leftrightarrow a \in \mathbb{N} \text{ et } b = u_a$$

a) $u_2 = 4 - 6 + 4 = 2$: le point A a bien pour ordonnée u_2 , il appartient au nuage.

b) $u_4 = 16 - 12 + 4 = 8$: le point B appartient également au nuage.

c) L'abscisse 1,5 n'est pas un entier : il n'existe pas de terme de rang 1,5. Le point C n'appartient donc pas au nuage, **même si** le calcul $1,5^2 - 3 \times 1,5 + 4 = 1,75$ tombe juste : il appartient à la courbe de la fonction, pas au nuage de la suite.

d) $u_5 = 25 - 15 + 4 = 14$: le point D appartient au nuage.

La distinction à retenir. La courbe de la fonction $x \mapsto x^2 - 3x + 4$ contient une infinité de points ; le nuage de la suite n'en garde que ceux d'abscisses entières. C'est exactement ce qui sépare une suite d'une fonction.

Réponse. a) oui ($u_2 = 2$) — b) oui ($u_4 = 8$) — c) non, l'abscisse n'est pas un entier — d) oui ($u_5 = 14$).

Correction de l'exercice 10 - Un nuage qui se stabilise

a) Le point d'abscisse 0 est à la hauteur 5 : la boisson sort du réfrigérateur à 5 °C. Trente minutes plus tard, c'est-à-dire au rang 3, on lit $u_3 = 14$ °C.

b) Les points montent régulièrement : la suite est croissante. Mais les écarts diminuent nettement (+4, puis +3, +2, +2, +1, +1, +0,5) : le réchauffement ralentit.

c) Les points se resserrent autour de 19 à 20 °C : la boisson semble se stabiliser à cette valeur. L'interprétation est physique — c'est la **température de la pièce** : une boisson ne peut pas dépasser la température ambiante en se réchauffant spontanément.

Ce que le graphique permet de dire. La croissance et le ralentissement se **lisent** ; la valeur de stabilisation se **conjecture**. Pour l'établir, il faudrait la relation de récurrence, par exemple $u_{n+1} = 0,8u_n + 4$, dont la valeur stable est solution de

$$x = 0,8x + 4$$

c'est-à-dire $x = 20$.

Réponse. a) 5 °C au départ, 14 °C au bout de 30 minutes — b) croissante, de plus en plus lentement — c) stabilisation vers 20 °C, la température de la pièce.

Correction de l'exercice 11 - Une décroissance vers zéro

a) Chaque terme est la moitié du précédent :

$$u_n = 8 \times 0,5^n$$

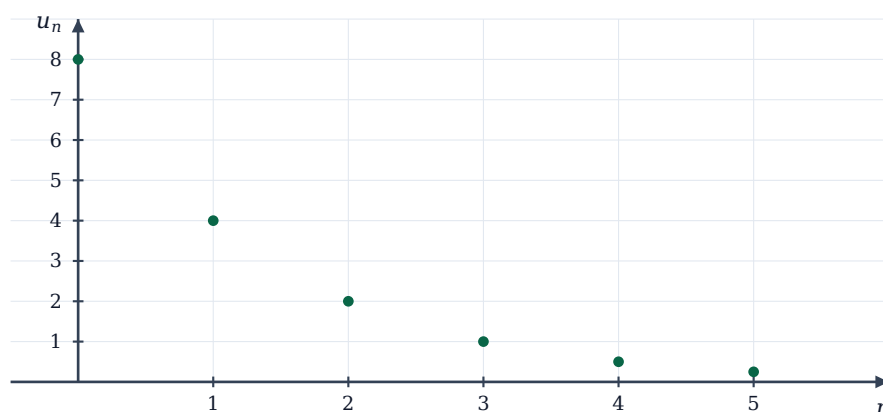
$$u_0 = 8 ; u_1 = 4 ; u_2 = 2 ; u_3 = 1 ; u_4 = 0,5.$$

b) On place les points (0 ; 8), (1 ; 4), (2 ; 2), (3 ; 1), (4 ; 0,5) : ils descendent en se rapprochant de l'axe des abscisses, de plus en plus lentement en apparence — en réalité, chaque hauteur est exactement la moitié de la précédente.

c) Non. Une puissance de 0,5 est toujours strictement positive, donc $u_n > 0$ pour tout rang : aucun point n'est sur l'axe. Les termes deviennent aussi petits que l'on veut ($u_{10} \approx 0,008$) sans jamais valoir 0.

Le vocabulaire à venir. On dit que la suite **tend vers** 0. Graphiquement, l'axe des abscisses est une frontière que le nuage approche sans la franchir ni la toucher.

Réponse. a) 8 ; 4 ; 2 ; 1 ; 0,5 — b) nuage décroissant vers l'axe — c) non, les termes restent strictement positifs.



Les points se rapprochent de l'axe des abscisses sans jamais l'atteindre.

Correction de l'exercice 12 - Deux nuages à comparer

a) Au rang 0, on lit $a_0 = 8$ et $b_0 = 2$: l'entreprise A livre quatre fois plus de colis le premier jour.

b) On cherche le premier rang où le point de B est **au-dessus** du point de A. Au rang 3, $b_3 = 6,3 < 8$; au rang 4, $b_4 = 8,8 > 8$. L'entreprise B dépasse donc l'entreprise A à partir du rang 4, c'est-à-dire le cinquième jour.

c) L'entreprise A est **constante** : tous ses points sont à la même hauteur, donc $a_{n+1} - a_n = 0$ et elle livre 8 000 colis par jour. L'entreprise B est **croissante**, et de plus en plus vite : ses écarts successifs valent 1,2 ; 1,3 ; 1,8 ; 2,5 ; 2,2.

Comparer deux suites sur un graphique. On superpose les deux nuages et l'on repère les rangs où l'un passe au-dessus de l'autre. C'est la lecture graphique de l'inéquation

$$b_n > a_n$$

que l'on résoudrait par le calcul si les formules étaient connues.

Réponse. a) l'entreprise A (8 contre 2 milliers) — b) à partir du rang 4 — c) A est constante à 8 000 colis, B est croissante et accélère.

Correction de l'exercice 13 - De la courbe aux termes

a) On calcule les images des rangs :

$$u_n = f(n) = \frac{12}{n+1}$$

$u_0 = 12$; $u_1 = 6$; $u_2 = 4$; $u_3 = 3$; $u_5 = 2$.

b) Les points du nuage sont **sur** la courbe de f , mais uniquement aux abscisses entières 0, 1, 2, ... La courbe, elle, est tracée pour tous les réels : elle sert de guide, elle ne fait pas partie de la représentation de la suite.

c) Si f est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors pour tout entier n on a $n < n+1$, donc $f(n) > f(n+1)$, c'est-à-dire $u_n > u_{n+1}$: la suite est décroissante. On le vérifie sur les valeurs calculées, qui descendent de 12 à 2.

Attention au sens de l'implication. « f décroissante » entraîne « (u_n) décroissante », mais la réciproque est fautive : une fonction qui oscille entre les entiers peut donner une suite parfaitement décroissante.

Réponse. a) 12 ; 6 ; 4 ; 3 ; 2 — b) sur la courbe de f , aux abscisses entières seulement — c) la suite est décroissante.

Correction de l'exercice 14 - Du graphique à la formule

a) Les points alignés signalent une suite arithmétique. Entre les rangs 2 et 6, on franchit 4 rangs pour une variation de $3 - 11 = -8$:

$$r = \frac{u_6 - u_2}{6 - 2} = \frac{-8}{4} = -2$$

b) On remonte du rang 2 au rang 0 en retirant deux fois la raison :

$u_0 = u_2 - 2r = 11 - 2 \times (-2) = 11 + 4 = 15$. D'où la formule explicite :

$$u_n = u_0 + nr = 15 - 2n$$

Contrôle : $u_2 = 15 - 4 = 11$ ✓ et $u_6 = 15 - 12 = 3$ ✓.

c) On résout $15 - 2n < 0$, soit $n > 7,5$: les termes sont négatifs à partir du rang 8, avec $u_7 = 1 > 0$ et $u_8 = -1 < 0$.

Le réflexe du coefficient directeur. La raison se calcule comme un coefficient directeur, $\frac{\text{variation des ordonnées}}{\text{variation des abscisses}}$, exactement comme pour une droite — parce que c'en est une.

Réponse. a) $r = -2$ — b) $u_0 = 15$ et $u_n = 15 - 2n$ — c) à partir du rang 8.

Correction de l'exercice 15 - Le graphique d'un remboursement

a) Chaque mensualité retire 400 € à la dette : $d_0 = 4\,800$ €, $d_1 = 4\,400$ € et $d_2 = 4\,000$ €.

b) La suite est **arithmétique de raison** -400 , de premier terme $4\,800$:

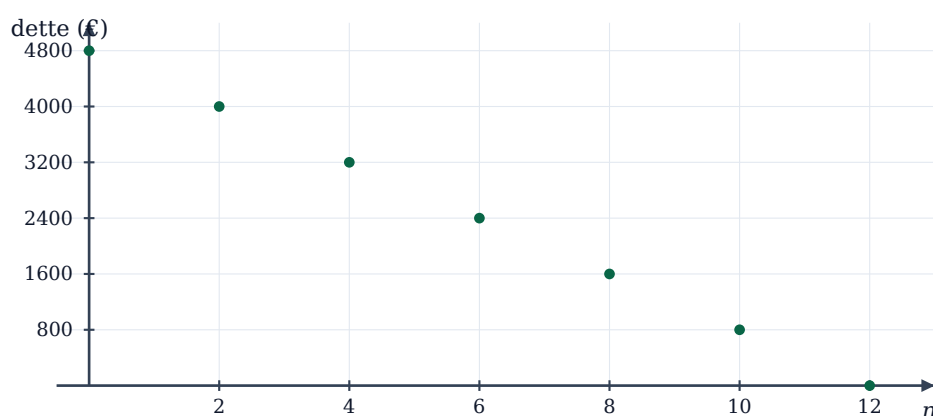
$$d_n = 4\,800 - 400n$$

c) Sur le graphique, les points sont alignés et descendent ; le nuage atteint l'axe des abscisses à l'abscisse 12. Le calcul le confirme : $4\,800 - 400n = 0$ donne $400n = 4\,800$, donc $n = 12$. La dette est soldée après 12 mensualités, soit un an.

d) Au-delà, la formule donnerait $d_{13} = -400$ € : une dette négative n'a pas de sens ici, car Marc cesse de payer une fois le prêt remboursé. Le modèle n'est valable que pour $0 \leq n \leq 12$.

Le contrôle de cohérence. $12 \times 400 = 4\,800$: le total des mensualités est bien égal au montant emprunté. Un calcul de ce genre, fait en une ligne, valide tout le modèle.

Réponse. a) $4\,800$ € ; $4\,400$ € ; $4\,000$ € — b) $d_n = 4\,800 - 400n$, arithmétique de raison -400 — c) dette nulle au rang 12 — d) une dette négative n'a pas de sens.



La dette restante, de rang 0 à rang 12 (un point sur deux).