

Plaquette 3 - Sens de variation

Suites numériques (introduction) — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définitions. La suite (u_n) est **croissante** si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n , **décroissante** si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n . Elle est **monotone** si elle est de l'un des deux types, et **constante** si $u_{n+1} = u_n$ pour tout n .

Méthode 1 : la différence. Valable pour toute suite.

$$u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow (u_n) \text{ est croissante}$$

On calcule u_{n+1} en remplaçant n par $n+1$ **partout**, on soustrait, on réduit, puis on étudie le signe du résultat.

Méthode 2 : le quotient. Uniquement si tous les termes sont **strictement positifs**.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Leftrightarrow (u_n) \text{ est croissante}$$

Les cas de référence.

Suite	Condition	Sens
arithmétique $u_{n+1} = u_n + r$	$r > 0$	croissante
arithmétique	$r < 0$	décroissante
géométrique $u_{n+1} = qu_n, u_0 > 0$	$q > 1$	croissante
géométrique, $u_0 > 0$	$0 < q < 1$	décroissante
géométrique	$q < 0$	ni l'un ni l'autre

Suite définie par $u_n = f(n)$. Si la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors la suite l'est aussi. Attention, la réciproque est fausse : une suite peut croître alors que la fonction ne le fait pas partout.

⚠ **Trois erreurs à éviter** : conclure sur les premiers termes ; utiliser le quotient avec des termes négatifs ou nuls ; oublier de préciser « pour tout entier n » dans la conclusion.

Correction de l'exercice 1 - Lire un tableau de valeurs

a) On soustrait chaque terme de son suivant :

$$- u_1 - u_0 = 9 - 12 = -3 ;$$

$$- u_2 - u_1 = 7 - 9 = -2 ;$$

$$- u_3 - u_2 = 6 - 7 = -1.$$

b) Toutes les différences calculées sont négatives : sur les rangs 0 à 5, chaque terme est plus petit que le précédent, la suite **décroît**. On remarque au passage que les baisses s'atténuent $(-3, -2, -1, -0,5, -0,25)$.

c) Non, pas encore. Un tableau ne montre que six termes ; rien ne dit ce qui se passe au rang 100. Pour l'affirmer, il faut étudier le signe de la différence **pour tout entier** n :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0 \text{ pour tout } n$$

ce qui suppose de connaître une formule ou une relation de récurrence, dont l'énoncé ne

dispose pas ici.

La leçon de méthode. Un tableau ou un graphique servent à **conjecturer** un sens de variation ; seule l'étude du signe de la différence le **démontre**.

Réponse. a) -3 ; -2 ; -1 — b) elle décroît sur ces rangs — c) non, six termes ne démontrent rien.

Correction de l'exercice 2 - Une suite affine croissante

On applique la méthode de la différence. Première étape : écrire u_{n+1} en remplaçant n par $n + 1$ dans la formule.

$$u_{n+1} = 4(n + 1) - 7 = 4n + 4 - 7 = 4n - 3$$

Deuxième étape : soustraire et réduire.

$$u_{n+1} - u_n = (4n - 3) - (4n - 7) = 4n - 3 - 4n + 7 = 4$$

Troisième étape : conclure. La différence vaut 4, qui est strictement positif, et ce **pour tout entier** n . Donc $u_{n+1} > u_n$ pour tout n : la suite (u_n) est strictement croissante.

Le contrôle rapide. Les premiers termes sont -7 , -3 , 1 , 5 : ils montent bien de 4 en 4, ce qui confirme le calcul. Des termes négatifs ne gênent en rien : la différence, elle, est positive.

Le piège des parenthèses. Au moment de soustraire, $-(4n - 7)$ change les **deux** signes. Oublier de distribuer le moins est l'erreur numéro un de cet exercice.

Réponse. $u_{n+1} - u_n = 4 > 0$: la suite est strictement croissante.

Correction de l'exercice 3 - Une suite affine décroissante

a) On calcule d'abord le terme de rang suivant :

$$v_{n+1} = 10 - 2(n + 1) = 10 - 2n - 2 = 8 - 2n$$

Puis la différence :

$$v_{n+1} - v_n = (8 - 2n) - (10 - 2n) = -2$$

La différence vaut $-2 < 0$ pour tout entier n : la suite (v_n) est strictement décroissante.

b) On résout $10 - 2n < 0$, soit $10 < 2n$, donc $n > 5$. Le premier rang entier qui convient est $n = 6$, et l'on vérifie : $v_5 = 0$ (ni positif ni négatif) puis $v_6 = -2 < 0$. Les termes sont donc négatifs à partir du rang 6.

Ce que la raison indique. La différence constante -2 est la **raison** de cette suite arithmétique. Le signe de la raison donne immédiatement le sens de variation : c'est le cas le plus simple du chapitre, et il ne demande jamais d'autre étude.

Réponse. a) $v_{n+1} - v_n = -2 < 0$, suite strictement décroissante — b) à partir du rang 6 ($v_6 = -2$).

Correction de l'exercice 4 - Le signe de la raison

a) La relation de récurrence retire 4 à chaque rang : la suite est arithmétique de raison $r = -4$. Or la différence de deux termes consécutifs est exactement cette raison :

$$s_{n+1} - s_n = -4 < 0$$

La suite est donc strictement décroissante, sans autre calcul.

b) Suite arithmétique de premier terme 50 et de raison -4 :

$$s_n = s_0 + nr = 50 - 4n$$

c) On cherche le plus grand rang tel que $50 - 4n \geq 0$, soit $n \leq 12,5$. Le dernier rang entier est $n = 12$, et $s_{12} = 50 - 48 = 2$. Le terme suivant, $s_{13} = -2$, est négatif : le dernier terme positif est donc $s_{12} = 2$.

Pourquoi « sans calcul ». Dès qu'on reconnaît une suite arithmétique, le sens de variation se lit sur le signe de la raison. Reconnaître le type de suite avant de se lancer fait gagner la moitié du travail.

Réponse. a) raison $-4 < 0$, suite décroissante — b) $s_n = 50 - 4n$ — c) $s_{12} = 2$.

Correction de l'exercice 5 - Une suite qui change de sens

a) En substituant les rangs 0 à 6 : 0 ; -5 ; -8 ; -9 ; -8 ; -5 ; 0. Les termes descendent puis remontent.

b) On écrit le terme de rang $n + 1$ en remplaçant n par $n + 1$ partout :

$$u_{n+1} = (n+1)^2 - 6(n+1) = n^2 + 2n + 1 - 6n - 6 = n^2 - 4n - 5$$

Puis on soustrait :

$$u_{n+1} - u_n = (n^2 - 4n - 5) - (n^2 - 6n) = 2n - 5$$

c) Le signe de $2n - 5$ dépend du rang : $2n - 5 < 0$ pour $n \leq 2$ et $2n - 5 > 0$ pour $n \geq 3$. La suite est donc décroissante du rang 0 au rang 3, puis croissante à partir du rang 3. Le plus petit terme est celui du changement de sens : $u_3 = 9 - 18 = -9$, ce que confirme le tableau du a).

Une suite peut n'être ni croissante ni décroissante. On parle alors de suite **non monotone**, et l'on décrit son comportement par morceaux. Le rang du minimum se lit là où la différence change de signe.

Réponse. a) 0, -5, -8, -9, -8, -5, 0 — b) différence = $2n - 5$ — c) décroissante jusqu'au rang 3 puis croissante, minimum $u_3 = -9$.

Correction de l'exercice 6 - Une différence qui dépend du rang

a) On ajoute le **rang** à chaque étape, et non un nombre fixe :

- $u_1 = u_0 + 0 = 2$;
- $u_2 = u_1 + 1 = 3$;
- $u_3 = u_2 + 2 = 5$;
- $u_4 = u_3 + 3 = 8$.

b) La relation de récurrence donne directement la différence :

$$u_{n+1} - u_n = n$$

Or $n \geq 0$, donc la différence est toujours positive ou nulle : la suite est croissante. Elle est même strictement croissante à partir du rang 1, puisque $u_1 - u_0 = 0$ est le seul écart nul.

c) Non. Une suite arithmétique ajoute **toujours le même** nombre ; ici, l'ajout vaut 0, puis 1, puis 2, puis 3 : la raison n'est pas constante. La suite est croissante de plus en plus vite.

Le réflexe utile. Quand la relation s'écrit $u_{n+1} = u_n + \text{quelque chose}$, la différence est lue directement : il suffit d'étudier le signe de ce « quelque chose », sans aucun calcul supplémentaire.

Réponse. a) 2 ; 3 ; 5 ; 8 — b) $u_{n+1} - u_n = n \geq 0$, suite croissante — c) non, la raison n'est pas constante.

Correction de l'exercice 7 - Une suite géométrique qui monte

a) On applique la formule explicite :

- $\ell_1 = 200 \times 1,05 = 210 \text{ €}$;
- $\ell_2 = 200 \times 1,05^2 = 220,50 \text{ €}$;
- $\ell_3 = 200 \times 1,05^3 \approx 231,53 \text{ €}$.

b) Tous les termes sont strictement positifs (produit de nombres positifs) : la méthode du quotient est utilisable.

$$\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = \frac{200 \times 1,05^{n+1}}{200 \times 1,05^n} = 1,05$$

Le quotient vaut $1,05 > 1$ pour tout entier n , donc $\ell_{n+1} > \ell_n$: la suite est strictement croissante. Le loyer augmente bien chaque année.

Pourquoi le quotient ici. Avec des puissances, la différence $200 \times 1,05^{n+1} - 200 \times 1,05^n$ demanderait une factorisation ; le quotient, lui, simplifie tout d'un coup grâce à la règle $\frac{a^{n+1}}{a^n} = a$. On choisit toujours l'outil qui simplifie.

Réponse. a) 210 € ; 220,50 € ; environ 231,53 € — b) quotient = $1,05 > 1$, suite strictement croissante.

Correction de l'exercice 8 - Une suite géométrique qui descend

a) $v_1 = 5\,000 \times 0,7 = 3\,500$; $v_2 = 3\,500 \times 0,7 = 2\,450$; $v_3 = 2\,450 \times 0,7 = 1\,715$.

b) Les termes sont strictement positifs, donc on peut comparer le quotient à 1 :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{5\,000 \times 0,7^{n+1}}{5\,000 \times 0,7^n} = 0,7$$

Comme $0 < 0,7 < 1$, on a $v_{n+1} < v_n$ pour tout entier n : la suite est strictement décroissante.

c) Non. Une puissance de 0,7 est toujours strictement positive, et $5\,000 > 0$: tous les termes restent strictement positifs. Ils se rapprochent de 0 sans jamais l'atteindre ni devenir négatifs.

Décroissante ne veut pas dire « qui finit par devenir négative ». C'est la confusion la plus répandue du chapitre : une suite peut décroître indéfiniment en restant au-dessus de 0.

Réponse. a) 3 500 ; 2 450 ; 1 715 — b) quotient = $0,7 < 1$, suite strictement décroissante — c) non, les termes restent positifs.

Correction de l'exercice 9 - Quand la raison est négative

a) La puissance de (-2) change de signe à chaque rang :

$$w_n = 3 \times (-2)^n$$

- $w_0 = 3 \times 1 = 3$;
- $w_1 = 3 \times (-2) = -6$;
- $w_2 = 3 \times 4 = 12$;
- $w_3 = 3 \times (-8) = -24$;
- $w_4 = 3 \times 16 = 48$.

b) Ni l'une ni l'autre. La suite descend de 3 à -6, remonte à 12, redescend à -24 : le sens change à chaque rang, donc la suite n'est pas monotone. Il serait faux d'écrire « elle est

croissante en valeur absolue donc croissante » : la croissance porte sur les termes eux-mêmes, signes compris.

c) Non. La méthode du quotient exige des termes **strictement positifs** : ici, un terme sur deux est négatif. Le quotient vaudrait bien -2 , mais le comparer à 1 n'aurait aucun sens, car multiplier par un nombre négatif **renverse** les inégalités.

La règle à retenir. Une suite géométrique de raison négative n'est jamais monotone : ses termes oscillent autour de 0 .

Réponse. a) $3 ; -6 ; 12 ; -24 ; 48$ — b) ni croissante ni décroissante — c) non, les termes ne sont pas tous positifs.

Correction de l'exercice 10 - Une suite en fraction

a) $u_0 = 1 + 3 = 4 ; u_1 = 1 + 1,5 = 2,5 ; u_2 = 1 + 1 = 2 ; u_3 = 1 + 0,75 = 1,75$.

b) On calcule la différence, en mettant les deux fractions au même dénominateur :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{n+2} - \frac{3}{n+1} = \frac{3(n+1) - 3(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-3}{(n+1)(n+2)}$$

Le numérateur vaut $-3 < 0$ et le dénominateur est strictement positif puisque $n \geq 0$. La différence est donc strictement négative pour tout n : la suite est strictement décroissante.

c) Non : la fraction $\frac{3}{n+1}$ est toujours strictement positive, donc $u_n > 1$ pour tout rang. Les termes se rapprochent de 1 par au-dessus sans l'atteindre.

Pourquoi la différence et non le quotient. Les termes sont bien positifs, le quotient serait donc licite, mais il conduirait à comparer $\frac{(n+4)(n+1)}{(n+2)(n+1)}$ à 1 : plus lourd. Entre deux méthodes valables, on prend la plus courte.

Réponse. a) $4 ; 2,5 ; 2 ; 1,75$ — b) différence $= \frac{-3}{(n+1)(n+2)} < 0$ — c) non, $u_n > 1$ pour tout n .

Correction de l'exercice 11 - Des termes qui oscillent

a) Le facteur $(-1)^n$ vaut 1 aux rangs pairs et -1 aux rangs impairs :

$$u_n = 5 + (-1)^n$$

On obtient $6 ; 4 ; 6 ; 4 ; 6 ; 4$.

b) La suite n'est ni croissante ni décroissante : $u_1 - u_0 = -2 < 0$ alors que $u_2 - u_1 = +2 > 0$. Deux différences de signes opposés suffisent à conclure que la suite n'est pas monotone — un contre-exemple est une démonstration complète.

c) Tous les termes valent 4 ou 6 : la suite est **bornée**, ses termes restent compris entre 4 et 6 , bornes incluses puisqu'elles sont atteintes.

Deux notions distinctes. Une suite peut être bornée sans être monotone, comme ici, ou monotone sans être bornée, comme $u_n = 4n - 7$. Ne pas mélanger les deux questions.

Réponse. a) $6 ; 4 ; 6 ; 4 ; 6 ; 4$ — b) non monotone (différences de signes contraires) — c) entre 4 et 6 .

Correction de l'exercice 12 - Lire la variation sur un graphique

a) On lit l'ordonnée des points d'abscisses $0, 1$ et 2 : $u_0 = 2, u_1 = 4$ et $u_2 = 5$.

b) Les points montent de gauche à droite : chaque terme est supérieur au précédent, la suite est croissante sur les rangs affichés. Mais la montée s'aplatit nettement à partir du

rang 3.

c) On calcule les écarts successifs :

$$u_{n+1} - u_n = \text{écart entre deux points consécutifs}$$

- $u_1 - u_0 = 4 - 2 = 2$;
- $u_2 - u_1 = 5 - 4 = 1$;
- $u_3 - u_2 = 5,5 - 5 = 0,5$.

Chaque écart est la moitié du précédent. En prolongeant, les écarts suivants seraient 0,25 puis 0,125 : les termes continuent de croître, de plus en plus lentement, et semblent se rapprocher de 6 sans l'atteindre.

Ce qu'on peut affirmer, et ce qu'on ne peut pas. Le graphique **montre** la croissance sur six rangs et **suggère** une stabilisation vers 6. Sans formule, la conjecture reste une conjecture : on l'annonce comme telle.

Réponse. a) $u_0 = 2$, $u_1 = 4$, $u_2 = 5$ — b) croissante, de plus en plus lentement — c) écarts 2 ; 1 ; 0,5, divisés par deux, avec stabilisation apparente vers 6.

Correction de l'exercice 13 - Abonnés en baisse

a) Perdre 4 % revient à conserver 96 %, donc à multiplier par 0,96 chaque mois : la suite est géométrique de premier terme 12 000 et de raison 0,96.

$$a_n = 12\,000 \times 0,96^n$$

b) Les termes sont strictement positifs, donc on compare le quotient à 1 :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 0,96 < 1$$

La suite est donc strictement décroissante : le magazine perd des abonnés tous les mois.

c) On calcule les termes successifs jusqu'au franchissement du seuil : $a_1 = 11\,520$; $a_2 \approx 11\,059$; $a_3 \approx 10\,617$; $a_4 \approx 10\,192$; $a_5 \approx 9\,784$. Le seuil de 10 000 est franchi au rang 5 : il faut 5 mois.

L'interprétation qui compte. La perte mensuelle diminue en nombre d'abonnés (−480 le premier mois, −408 le cinquième) alors que le pourcentage, lui, reste le même : c'est toute la différence entre une baisse fixe et une baisse proportionnelle.

Réponse. a) $a_n = 12\,000 \times 0,96^n$ — b) quotient $0,96 < 1$ — c) au bout de 5 mois ($a_5 \approx 9\,784$).

Correction de l'exercice 14 - Deux tarifs qui se croisent

a) Pour chaque suite, la différence de deux termes consécutifs est constante :

$$A_{n+1} - A_n = 15 \quad \text{et} \quad B_{n+1} - B_n = 5$$

Les deux suites sont donc strictement croissantes : les deux tarifs augmentent, mais celui du club A augmente trois fois plus vite.

b) On étudie la différence des deux tarifs :

$$A_n - B_n = (250 + 15n) - (400 + 5n) = 10n - 150$$

Cette expression est négative pour $n < 15$, nulle pour $n = 15$ et positive pour $n > 15$. Donc le club A est moins cher les quinze premières années, les tarifs sont égaux la seizième année ($A_{15} = B_{15} = 475$ €), et le club B devient moins cher ensuite.

c) Sur six ans, on est dans la zone $n < 15$: le club A est moins cher chaque année (par exemple $A_5 = 325$ € contre $B_5 = 425$ €). On conseille donc le club A.

Comparer deux suites, c'est étudier une différence. On ne compare pas des tableaux de valeurs au hasard : on calcule $A_n - B_n$ et l'on étudie son signe, ce qui traite tous les rangs d'un coup.

Réponse. a) toutes deux croissantes (raisons 15 et 5) — b) $A_n - B_n = 10n - 150$, A moins cher avant le rang 15, égalité à 475 € au rang 15, B moins cher ensuite — c) le club A.

Correction de l'exercice 15 - Choisir la bonne méthode

a) **Méthode de la différence**, car la formule est affine et la soustraction élimine les termes en n :

$$u_{n+1} - u_n = (7(n+1) - 3) - (7n - 3) = 7$$

La différence vaut $7 > 0$: la suite est strictement croissante.

b) **Méthode du quotient**, car les termes sont strictement positifs et la formule contient une puissance :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4 \times 0,85^{n+1}}{4 \times 0,85^n} = 0,85$$

Le quotient est compris entre 0 et 1 : la suite est strictement décroissante.

c) **Méthode de la différence** à nouveau, mais le résultat dépend cette fois du rang :

$$w_{n+1} - w_n = ((n+1)^2 - 10(n+1) + 3) - (n^2 - 10n + 3) = 2n - 9$$

Cette différence est négative pour $n \leq 4$ et positive pour $n \geq 5$: la suite décroît du rang 0 au rang 5, puis croît. Son plus petit terme est $w_5 = 25 - 50 + 3 = -22$.

La règle de choix. Puissances et termes positifs : quotient. Sommes, différences, polynômes : différence. Et dès que le résultat dépend de n , on étudie son signe au lieu de conclure trop vite.

Réponse. a) différence = $7 > 0$, croissante — b) quotient = $0,85 < 1$, décroissante — c) différence = $2n - 9$: décroissante jusqu'au rang 5 (minimum $w_5 = -22$) puis croissante.