

Plaquette 5 - Synthèse : suites en contexte

Suites numériques (introduction) — Première générale

Corrections détaillées

Boîte à outils

Traduire un énoncé.

L'énoncé dit	On écrit
« on ajoute r à chaque étape »	$u_{n+1} = u_n + r$ (arithmétique)
« on augmente de t % »	$u_{n+1} = \left(1 + \frac{t}{100}\right)u_n$ (géométrique)
« on perd t % »	$u_{n+1} = \left(1 - \frac{t}{100}\right)u_n$
« on perd t % puis on ajoute b »	$u_{n+1} = au_n + b$

Les deux formules explicites du chapitre.

$$u_n = u_0 + nr \quad \text{et} \quad u_n = u_0 \times q^n$$

La première pour une suite arithmétique de raison r , la seconde pour une suite géométrique de raison q . Une récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ (avec $a \neq 1$ et $b \neq 0$) n'en possède aucune au programme : on la calcule pas à pas.

Sens de variation. Signe de $u_{n+1} - u_n$, ou quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ comparé à 1 si les termes sont strictement positifs.

Valeur stable. Pour $u_{n+1} = au_n + b$, le nombre x qui ne bouge plus vérifie

$$x = ax + b$$

Si les termes s'en approchent, c'est vers lui qu'ils se stabilisent.

Chercher un seuil. On calcule les termes successifs (tableur, calculatrice, boucle *while*) jusqu'au premier qui franchit le seuil, et l'on donne **l'encadrement** : le dernier terme avant, le premier après.

Interpréter. Un résultat de suite se conclut par une phrase avec l'unité et le sens concret, et l'on précise le **domaine de validité** du modèle quand l'énoncé y invite.

Correction de l'exercice 1 - Deux augmentations de salaire

a) L'offre A multiplie le salaire par 1,025 chaque année : la suite est **géométrique** de raison 1,025.

$$a_n = 1\,800 \times 1,025^n$$

L'offre B ajoute 60 € chaque année : la suite est **arithmétique** de raison 60.

$$b_n = 1\,800 + 60n$$

b) Au bout de cinq ans : $a_5 = 1\,800 \times 1,025^5 \approx 2\,036,53$ € contre $b_5 = 1\,800 + 300 = 2\,100$ €. L'offre B est donc meilleure à cette échéance, de près de 64 €.

c) Oui. L'augmentation de A porte sur un salaire qui grandit, donc son gain annuel grandit aussi (45 € la première année, mais 79 € la vingt-quatrième), alors que celui de B reste fixé à 60 €. En calculant : $a_{23} \approx 3\,176,30$ € contre $b_{23} = 3\,180$ €, puis $a_{24} \approx 3\,255,71$ € contre $b_{24} = 3\,240$ €. L'offre A dépasse l'offre B à partir de la vingt-quatrième année.

La morale du calcul. Un pourcentage l'emporte toujours, à terme, sur une somme fixe — mais « à terme » peut vouloir dire vingt-quatre ans. Le bon conseil dépend donc de la durée envisagée, pas seulement de la forme de l'offre.

Réponse. a) $a_n = 1\,800 \times 1,025^n$ (géométrique), $b_n = 1\,800 + 60n$ (arithmétique) — b) à 5 ans, B est meilleure (2 100 € contre 2 036,53 €) — c) oui, A dépasse B à partir de la 24^e année.

Correction de l'exercice 2 - La fréquentation d'un site

a) Conserver 90 % revient à multiplier par 0,9, puis on ajoute les 300 nouveaux visiteurs :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 300 \quad \text{avec } u_0 = 1\,200$$

b) On enchaîne les calculs sans arrondir en cours de route :

- $u_1 = 0,9 \times 1\,200 + 300 = 1\,080 + 300 = 1\,380$;
- $u_2 = 0,9 \times 1\,380 + 300 = 1\,242 + 300 = 1\,542$;
- $u_3 = 0,9 \times 1\,542 + 300 = 1\,387,8 + 300 \approx 1\,688$.

c) Si $u_n = 3\,000$, alors $u_{n+1} = 0,9 \times 3\,000 + 300 = 2\,700 + 300 = 3\,000$: le nombre de visiteurs ne change plus. On retrouve cette valeur en résolvant $x = 0,9x + 300$, soit $0,1x = 300$ et $x = 3\,000$.

d) Les termes croissent (1 200, 1 380, 1 542, 1 688...) tout en restant sous 3 000 : la fréquentation augmente, de moins en moins vite, et se stabilise autour de 3 000 visiteurs mensuels. Les pertes (10 % de l'effectif) finissent par compenser exactement les 300 arrivées.

L'équilibre en une phrase. La valeur stable est atteinte quand la perte proportionnelle égale l'apport fixe : 10 % de 3 000 font justement 300.

Réponse. a) $u_{n+1} = 0,9u_n + 300$, $u_0 = 1\,200$ — b) 1 380 ; 1 542 ; environ 1 688 — c) $0,9 \times 3\,000 + 300 = 3\,000$ — d) la fréquentation croît et se stabilise vers 3 000 visiteurs.

Correction de l'exercice 3 - La valeur d'une voiture

a) Perdre 18 % revient à conserver 82 %, soit multiplier par 0,82 : la suite est géométrique de raison 0,82.

$$v_n = 18\,000 \times 0,82^n$$

b) $v_3 = 18\,000 \times 0,82^3 \approx 18\,000 \times 0,551368 \approx 9\,925$ €.

c) La moitié du prix d'achat vaut 9 000 €. On calcule les termes : $v_1 = 14\,760$ € ; $v_2 \approx 12\,103$ € ; $v_3 \approx 9\,925$ € ; $v_4 \approx 8\,138$ €. Le seuil est franchi au rang 4 : il faut 4 **ans** pour que la voiture vaille moins de la moitié de son prix.

d) Non. Les pertes successives valent 3 240 €, puis 2 657 €, puis 2 179 €, puis 1 786 € : elles diminuent, car 18 % portent chaque année sur une valeur plus faible. Le **pourcentage** est constant, pas la perte en euros.

Le piège du raisonnement proportionnel. Perdre 18 % pendant cinq ans ne fait pas perdre 90 % : il reste environ 6 673 €, soit 37 % du prix d'achat. On ne cumule jamais des pourcentages par addition.

Réponse. a) $v_n = 18\,000 \times 0,82^n$ — b) environ 9 925 € — c) au bout de 4 ans ($v_4 \approx 8\,138$ €) — d) non, la perte en euros diminue.

Correction de l'exercice 4 - La dose dans le sang

a) Entre deux prises, l'organisme élimine 40 % de la quantité présente : il en reste 60 %, d'où la multiplication par 0,6. Le patient avale ensuite 20 mg supplémentaires :

$$q_{n+1} = 0,6 q_n + 20$$

b) On applique la relation jour après jour :

- $q_1 = 0,6 \times 20 + 20 = 32 \text{ mg}$;
- $q_2 = 0,6 \times 32 + 20 = 39,2 \text{ mg}$;
- $q_3 = 0,6 \times 39,2 + 20 = 43,52 \text{ mg}$;
- $q_4 = 0,6 \times 43,52 + 20 \approx 46,11 \text{ mg}$.

c) La valeur d'équilibre vérifie $x = 0,6x + 20$, soit $0,4x = 20$ et $x = 50$. Les termes calculés croissent en se rapprochant de 50 sans l'atteindre : chaque jour, l'écart à 50 est multiplié par 0,6 (30 ; 18 ; 10,8 ; 6,48 ; 3,89). La quantité se stabilise donc autour de 50 mg.

d) Oui. La suite est croissante et tous ses termes restent strictement inférieurs à 50 mg, donc au seuil de toxicité de 55 mg : le traitement ne conduit jamais à une accumulation dangereuse.

Pourquoi le corps n'accumule pas indéfiniment. L'élimination est proportionnelle : plus il y a de produit, plus on en élimine. L'équilibre est atteint quand 40 % de la quantité présente égalent la dose quotidienne, soit $0,4 \times 50 = 20 \text{ mg}$ ✓.

Réponse. a) il reste 60 % puis on ajoute 20 mg — b) 32 ; 39,2 ; 43,52 ; environ 46,11 mg — c) stabilisation à 50 mg — d) oui, les termes restent sous $50 < 55 \text{ mg}$.

Correction de l'exercice 5 - Une population de poissons

a) Une hausse de 15 % multiplie par 1,15, puis le prélèvement retire 60 poissons :

$$p_{n+1} = 1,15 p_n - 60 \quad \text{avec } p_0 = 800$$

b) On applique la relation année après année :

- $p_1 = 1,15 \times 800 - 60 = 920 - 60 = 860$;
- $p_2 = 1,15 \times 860 - 60 = 989 - 60 = 929$;
- $p_3 = 1,15 \times 929 - 60 \approx 1\,068,35 - 60 \approx 1\,008$.

La population augmente.

c) Avec 400 poissons : $1,15 \times 400 - 60 = 460 - 60 = 400$. La population ne change pas : 400 est la valeur d'équilibre, celle pour laquelle la croissance naturelle (60 poissons) compense exactement le prélèvement. On la retrouve en résolvant $x = 1,15x - 60$, soit $0,15x = 60$ et $x = 400$.

d) En partant de 300 poissons, la croissance naturelle ne rapporte que 45 individus, moins que les 60 prélevés : $p_1 = 1,15 \times 300 - 60 = 285$. La population **diminue**, et de plus en plus vite (270 ; 250,5 ; 228...) : l'étang se vide.

Le sens de la valeur d'équilibre. Au-dessus de 400, la population grandit ; en dessous, elle s'effondre. Le seuil sépare deux comportements opposés — c'est exactement la question que se pose un gestionnaire de ressource avant de fixer un quota.

Réponse. a) $p_{n+1} = 1,15p_n - 60$, $p_0 = 800$ — b) 860 ; 929 ; environ 1 008 — c) $1,15 \times 400 - 60 = 400$ — d) la population décroît jusqu'à disparaître.

Correction de l'exercice 6 - Réduire ses déchets

a) Baisser de 3 % revient à conserver 97 %, donc à multiplier par 0,97 :

$$d_n = 2\,500 \times 0,97^n$$

b) Les termes sont strictement positifs, donc on compare le quotient à 1 :

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{2\,500 \times 0,97^{n+1}}{2\,500 \times 0,97^n} = 0,97$$

Comme $0 < 0,97 < 1$, la suite est strictement décroissante : la masse de déchets diminue chaque année.

c) On calcule les termes successifs : $d_5 \approx 2\,147$; $d_6 \approx 2\,082$; $d_7 \approx 2\,020$; $d_8 \approx 1\,959$ tonnes. L'objectif est atteint au rang 8 : il faut 8 **ans** pour passer sous 2 000 tonnes, avec $d_7 \approx 2\,020 > 2\,000$ et $d_8 \approx 1\,959 < 2\,000$.

Ce que 3 % par an représentent. En huit ans, la baisse cumulée atteint 21,6 % et non 24 % : chaque baisse porte sur une masse déjà réduite. L'écart paraît faible, mais il compte quand on affiche un objectif chiffré.

Réponse. a) $d_n = 2\,500 \times 0,97^n$ — b) quotient $0,97 < 1$ — c) au bout de 8 ans ($d_8 \approx 1\,959$ t).

Correction de l'exercice 7 - Un programme qui cherche un seuil

a) La variable d contient la masse de déchets de l'année courante et n compte les années. Tant que la condition $d > 2000$ est vraie, la boucle applique une baisse de 3 % et incrémente le compteur. Elle s'arrête donc **dès que** la masse passe sous le seuil, et n contient alors le nombre d'années écoulées. Le programme traduit exactement la recherche du plus petit rang tel que

$$2\,500 \times 0,97^n \leq 2\,000$$

b) On sait que $d_7 \approx 2\,020 > 2\,000$ et $d_8 \approx 1\,959 \leq 2\,000$: la boucle effectue huit tours et le programme affiche 8.

c) Il suffit de changer le seuil dans la condition : *while* $d > 1500$:. Le reste du programme est inchangé, puisque le mécanisme de la baisse ne change pas.

Quelle boucle choisir ? On utilise *for* quand on connaît **le nombre de tours** (calculer u_{10}), et *while* quand on cherche **le rang** où une condition devient vraie. C'est la distinction à retenir de tout le chapitre.

Réponse. a) elle applique -3 % et compte les années tant que la masse dépasse 2 000 t — b) 8 — c) remplacer la condition par *while* $d > 1500$..

Correction de l'exercice 8 - Deux placements à comparer

a) Le placement 1 multiplie le capital par 1,03 chaque année : suite géométrique.

$$c_n = 5\,000 \times 1,03^n$$

Le placement 2 ajoute 170 € chaque année : suite arithmétique.

$$e_n = 5\,000 + 170n$$

b) Au bout de dix ans : $c_{10} = 5\,000 \times 1,03^{10} \approx 5\,000 \times 1,343916 \approx 6\,720$ € et $e_{10} = 5\,000 + 1\,700 = 6\,700$ €. Le placement 1 rapporte environ 20 € de plus.

c) Sur dix ans, les deux placements sont presque équivalents, avec un très léger avantage au placement 1. L'écart se creuse ensuite : au bout de vingt ans, $c_{20} \approx 9\,031$ € contre $e_{20} = 8\,400$ €, soit plus de 600 € de différence. On conseille donc le placement 1, d'autant plus nettement que la durée est longue.

Pourquoi les deux se ressemblent au début. La première année, 3 % de 5 000 € font 150 €, un peu moins que les 170 € du placement 2. Ce n'est qu'en accumulant des intérêts sur les intérêts que le placement 1 prend l'avantage.

Réponse. a) $c_n = 5\,000 \times 1,03^n$ et $e_n = 5\,000 + 170n$ — b) environ 6 720 € contre 6 700 €

— c) le placement 1, d'autant plus que la durée est longue.

Correction de l'exercice 9 - Des carrés de plus en plus petits

a) Le côté est multiplié par 0,9 à chaque rang : la suite (c_n) est géométrique de premier terme 10 et de raison 0,9.

$$c_n = 10 \times 0,9^n$$

b) L'aire d'un carré est le carré de son côté :

$$A_n = c_n^2 = (10 \times 0,9^n)^2 = 10^2 \times (0,9^n)^2 = 100 \times 0,81^n$$

en utilisant $(0,9^n)^2 = (0,9^2)^n = 0,81^n$.

c) $A_0 = 100 \text{ cm}^2$; $A_1 = 81 \text{ cm}^2$; $A_2 = 65,61 \text{ cm}^2$.

d) L'aire est multipliée par 0,81 à chaque étape, ce qui correspond à une baisse de 19 % — et non de 10 % comme le côté.

Le piège à connaître. Réduire une longueur de 10 % réduit l'aire de 19 % : les aires ne suivent pas le même pourcentage que les longueurs, parce qu'elles dépendent du carré de la longueur. C'est la même raison qui fait qu'un agrandissement de rapport 2 multiplie l'aire par 4.

Réponse. a) $c_n = 10 \times 0,9^n$ — b) $A_n = c_n^2 = 100 \times 0,81^n$ — c) 100 ; 81 ; 65,61 cm^2 — d) une baisse de 19 %.

Correction de l'exercice 10 - Les nénuphars de l'étang

a) La surface double chaque jour : la suite est géométrique de raison 2.

$$s_n = s_0 \times 2^n = 2^n$$

b) Le jour 30, la surface est s_{30} ; la veille, elle valait la moitié puisqu'elle double ensuite. La réponse est donc le **jour 29** : $s_{29} = \frac{s_{30}}{2}$. Beaucoup répondent « le jour 15 » en raisonnant proportionnellement — c'est faux, car un doublement n'est pas une croissance régulière.

c) $s_{10} = 2^{10} = 1\,024$ alors que $s_{30} = 2^{30} = 1\,073\,741\,824$. Au bout du tiers du temps, la surface couverte représente moins d'un millionième de la surface finale : l'envahissement reste invisible pendant très longtemps, puis devient brutal.

Ce que cet exemple illustre. Une croissance géométrique trompe l'intuition : elle paraît négligeable pendant l'essentiel de la durée, et l'essentiel se joue dans les toutes dernières étapes. C'est le même mécanisme que pour la propagation d'une épidémie ou le remplissage d'un disque dur.

Réponse. a) $s_n = 2^n$ — b) le jour 29 — c) $s_{10} = 1\,024$ contre $s_{30} = 1\,073\,741\,824$, soit moins d'un millionième.

Correction de l'exercice 11 - Reconnaître la suite d'un tableur

a) On teste d'abord les différences : $4\,200 - 4\,000 = 200$, puis $4\,410 - 4\,200 = 210$. Elles ne sont pas égales, la suite n'est donc **pas arithmétique**.

On teste ensuite les quotients :

$$\frac{4\,200}{4\,000} = 1,05 \quad ; \quad \frac{4\,410}{4\,200} = 1,05 \quad ; \quad \frac{4\,630,5}{4\,410} = 1,05$$

Le quotient est constant : la suite est **géométrique de raison 1,05**, ce qui correspond à une hausse de 5 % à chaque étape.

b) Avec le premier terme $u_0 = 4\,000$:

$$u_n = 4\,000 \times 1,05^n$$

c) En B3, on a saisi $= B2 \times 1,05$ (ou, ce qui revient au même, $= 1,05 \times B2$), puis recopié la formule vers le bas : la référence relative descend d'une ligne à chaque recopie.

La méthode de reconnaissance. Différences d'abord, quotients ensuite — et il faut tester **au moins deux** écarts et deux quotients : un seul ne prouve rien, puisque deux valeurs quelconques ont toujours une différence et un quotient.

Réponse. a) géométrique, quotient constant 1,05 — b) $u_n = 4\,000 \times 1,05^n$ — c) $= B2 \times 1,05$.

Correction de l'exercice 12 - Le forfait de la salle de escalade

a) L'abonné paie une fois la carte, puis 6 € par séance ; le client sans carte paie 14 € par séance :

$$c_n = 80 + 6n \quad \text{et} \quad s_n = 14n$$

b) Les deux suites sont arithmétiques, de raisons respectives 6 et 14, toutes deux positives : les deux dépenses sont strictement croissantes. C'est attendu, une dépense cumulée ne peut pas diminuer.

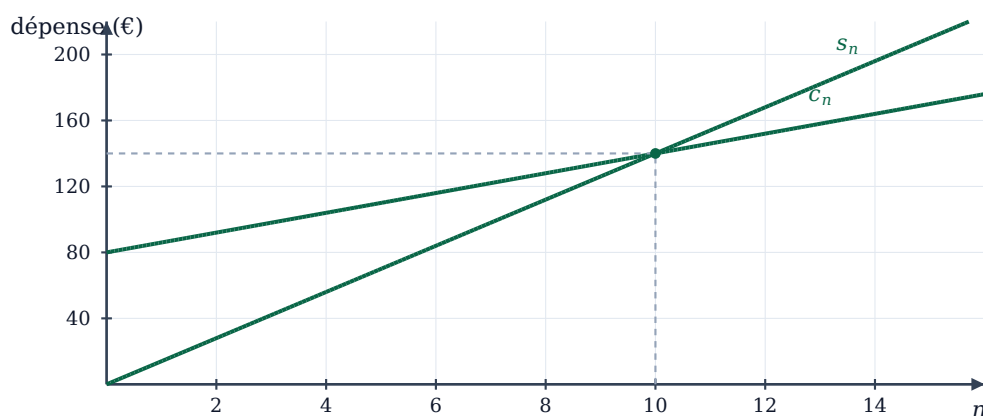
c) On compare par la différence :

$$c_n - s_n = (80 + 6n) - 14n = 80 - 8n$$

Cette expression est positive pour $n < 10$, nulle pour $n = 10$ et négative pour $n > 10$. Jusqu'à la neuvième séance, la carte coûte plus cher ; à la dixième, les deux solutions coûtent 140 € ; à partir de la onzième séance, la carte est plus avantageuse.

La lecture graphique. Les deux nuages sont portés par deux droites qui se croisent au point (10 ; 140) : le rang du croisement est exactement le seuil de rentabilité. Calcul et graphique disent la même chose, mais seul le calcul le démontre.

Réponse. a) $c_n = 80 + 6n$ et $s_n = 14n$ — b) croissantes, de raisons 6 et 14 — c) à partir de la onzième séance (égalité à 140 € à la dixième).



Les deux dépenses se croisent à la dixième séance, pour 140 €.

Correction de l'exercice 13 - Le chauffage de la salle des fêtes

a) On ajoute 1,5 °C par heure à une température initiale de 8 °C : la suite est **arithmétique de raison 1,5**.

$$t_n = 8 + 1,5n$$

- b) On résout $8 + 1,5n \geq 19$, soit $1,5n \geq 11$, donc $n \geq \frac{11}{1,5} \approx 7,33$. Il faut donc 8 heures de chauffage : $t_7 = 18,5 \text{ °C}$ (insuffisant) et $t_8 = 20 \text{ °C}$ ✓.
- c) Huit heures de chauffage coûtent $8 \times 2,40 = 19,20 \text{ €}$.
- d) Non. Le modèle donnerait $t_{24} = 8 + 36 = 44 \text{ °C}$, ce qui est irréaliste : en pratique, le chauffage s'arrête à la température de consigne, et les pertes thermiques augmentent avec l'écart de température. Le modèle affine ne décrit correctement que la phase de montée.

La réponse en deux temps. À la question b), l'inéquation donne 7,33 ; comme on ne chauffe pas par fractions d'heure dans ce modèle, on répond 8 heures. Un résultat non entier doit toujours être ramené à la réalité de la situation.

Réponse. a) $t_n = 8 + 1,5n$, arithmétique de raison 1,5 — b) 8 heures ($t_8 = 20 \text{ °C}$) — c) 19,20 € — d) non, le modèle ne vaut que sur la phase de montée.

Correction de l'exercice 14 - Lire l'évolution d'un stock

- a) On lit l'ordonnée des points : le stock initial est $u_0 = 200$ palettes, et $u_4 = 120$ palettes.
- b) Les points sont alignés et descendent : le stock diminue de 20 palettes chaque semaine. La suite est arithmétique de raison -20 , donc $u_n = 200 - 20n$.
- c) On applique la formule du taux d'évolution :

$$t = \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100 = \frac{80 - 200}{200} \times 100 = -60$$

Le stock a baissé de 60 % en six semaines.

- d) Avec la même baisse de 20 palettes par semaine, on aurait $u_{10} = 200 - 200 = 0$: le stock serait exactement épuisé à la semaine 10. En pratique, l'entrepôt sera réapprovisionné avant, mais le calcul donne l'échéance à surveiller.

Pourquoi la question c) ne se lit pas sur la pente. La pente donne la baisse en **palettes** (-20 par semaine) ; le taux d'évolution donne la baisse en **pourcentage** (-60% sur six semaines). Ce sont deux informations différentes, et confondre les deux est l'erreur classique.

Réponse. a) 200 puis 120 palettes — b) baisse régulière de 20 palettes par semaine, $u_n = 200 - 20n$ — c) -60% — d) oui, stock nul à la semaine 10.

Correction de l'exercice 15 - L'espace de coworking

- a) Si 12 % résilient, il reste 88 % des abonnés, soit une multiplication par 0,88 ; on ajoute ensuite les 30 nouveaux :

$$a_{n+1} = 0,88 a_n + 30 \quad \text{avec } a_0 = 150$$

- b) On applique la relation mois après mois :

- $a_1 = 0,88 \times 150 + 30 = 132 + 30 = 162$;
- $a_2 = 0,88 \times 162 + 30 = 142,56 + 30 \approx 173$;
- $a_3 = 0,88 \times 172,56 + 30 \approx 151,85 + 30 \approx 182$.

- c) La valeur d'équilibre vérifie $x = 0,88x + 30$, soit $0,12x = 30$ et $x = 250$. Tant que le nombre d'abonnés est inférieur à 250, les inscriptions l'emportent sur les résiliations et l'effectif croît.

- d) L'affirmation est fausse. La suite est croissante, mais tous ses termes restent **inférieurs à 250** : chaque mois, l'écart à 250 est multiplié par 0,88, il diminue sans changer de signe. Le gérant ne peut pas atteindre 400 abonnés avec ce fonctionnement,

quelle que soit la durée. Pour dépasser 250, il lui faudrait augmenter les inscriptions ou réduire le taux de résiliation.

Le raisonnement qui tranche. On ne discute pas une prévision en calculant vingt-quatre termes : on cherche la valeur d'équilibre, et l'on compare l'objectif annoncé à cette limite. Un modèle avec perte proportionnelle et apport fixe est toujours plafonné.

Réponse. a) $a_{n+1} = 0,88a_n + 30$, $a_0 = 150$ — b) 162 ; environ 173 ; environ 182 — c) équilibre à 250 abonnés — d) faux : le modèle plafonne à 250, jamais 400.