

Plaquette 2 - Modes de génération

Suites numériques (introduction) — Première générale

Exercices

Méthode

Une suite se définit de deux façons, et savoir les distinguer est le cœur du chapitre. En **explicite**, une formule donne u_n à partir du rang : on saute directement au terme voulu. En **récurrence**, on donne le premier terme et une règle de passage $u_{n+1} = f(u_n)$: chaque terme se déduit du précédent, donc il faut les calculer tous, dans l'ordre. Cette plaquette entraîne les deux modes, le passage de l'un à l'autre quand il est possible, et les outils qui font le travail répétitif à votre place : le tableur et la boucle Python.

Exercice 1 - Une récurrence additive

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + 4$.
Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

Exercice 2 - Une récurrence multiplicative

Soit (v_n) définie par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 3v_n$ pour tout $n \geq 0$.

- Calculer les cinq premiers termes.
- Combien de fois v_4 est-il plus grand que v_0 ?

Exercice 3 - Une récurrence affine

Soit (w_n) définie par $w_0 = 100$ et $w_{n+1} = 0,8w_n + 10$.

- Calculer w_1 , w_2 , w_3 et w_4 .
- Les termes semblent-ils monter ou descendre ?

Exercice 4 - Deux écritures, une seule suite

On donne la suite (a_n) définie explicitement par $a_n = 2n + 3$, et la suite (b_n) définie par $b_0 = 3$ et $b_{n+1} = b_n + 2$.

- Calculer les cinq premiers termes de chaque suite.
- Que peut-on conjecturer ?
- Quel mode choisir pour calculer le terme de rang 50 ? Pourquoi ?

Exercice 5 - Remonter d'un terme à l'autre

Soit (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

- Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- Sachant que $u_5 = 67$, retrouver u_4 sans calculer toute la suite.

Exercice 6 - Vers une valeur limite

Soit (u_n) définie par $u_0 = 20$ et $u_{n+1} = 0,5u_n + 3$.

- Calculer u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .
- Vérifier que si un terme vaut 6, le suivant vaut également 6.
- Que peut-on conjecturer sur les termes suivants ?

Exercice 7 - De la récurrence à l'explicite : cas additif

Soit (u_n) définie par $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = u_n - 3$.

- Calculer les quatre premiers termes.
- Exprimer u_n en fonction de n .
- Calculer u_{30} .

Exercice 8 - De la récurrence à l'explicite : cas multiplicatif

Un capital de 1 500 € est placé au taux annuel de 3 %. On note c_n le capital, en euros, au bout de n années.

- Justifier que $c_{n+1} = 1,03 c_n$.
- Exprimer c_n en fonction de n .
- Calculer le capital au bout de 10 ans, arrondi au centime.

Exercice 9 - De l'explicite à la récurrence

Soit (u_n) définie pour $n \geq 0$ par $u_n = 5n + 2$.

- Calculer u_0 et u_1 .
- Montrer que, pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n + 5$.
- En déduire une définition par récurrence de la suite.

Exercice 10 - Lire un programme Python

On exécute le programme suivant.

```
u = 5
for k in range(10):
    u = 0.9 * u + 2
print(u)
```

- Quelle suite ce programme calcule-t-il ? Préciser le premier terme et la relation de récurrence.
- Quel terme est affiché ?
- Donner la valeur affichée, arrondie au centième.

Exercice 11 - Une formule de tableur

On veut calculer au tableur les termes de la suite définie par $p_0 = 300$ et $p_{n+1} = 0,95 p_n + 10$. Les rangs sont saisis en colonne A et les termes en colonne B, le terme p_0 étant en cellule B2.

- a) Quelle formule saisir en B3 avant de la recopier vers le bas ?
- b) Calculer p_1 , p_2 et p_3 .
- c) Vérifier que la valeur 200 est stable pour cette suite.

Exercice 12 - Atteindre un seuil

Une population de bactéries est traitée par un antiseptique : chaque heure, il en reste 85 %. Au départ, la colonie compte 1 000 bactéries. On note b_n leur nombre au bout de n heures.

- a) Donner la relation de récurrence liant b_{n+1} et b_n .
- b) Au bout de combien d'heures la colonie passe-t-elle sous 500 bactéries ?

Exercice 13 - Deux termes pour en faire un troisième

La suite de Fibonacci est définie par $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

- a) Calculer les dix premiers termes.
- b) En quoi cette définition diffère-t-elle de celles rencontrées jusqu'ici ?
- c) Calculer $\frac{F_{10}}{F_9}$, arrondi au millième.

Exercice 14 - Le bassin de rétention

Un bassin contient 300 m³ d'eau. Chaque jour, 8 % du volume présent s'infiltre dans le sol, et l'on y déverse 40 m³ d'eau. On note v_n le volume, en mètres cubes, au bout de n jours.

- a) Justifier que $v_{n+1} = 0,92 v_n + 40$.
- b) Calculer v_1 , v_2 et v_3 , arrondis au centième.
- c) Que représentent respectivement le coefficient 0,92 et le terme +40 ?

Exercice 15 - Épargne avec versements

Léa place 2 000 € sur un livret rémunéré à 2 % par an. Chaque année, juste après le versement des intérêts, elle ajoute 300 €. On note c_n le capital, en euros, au bout de n années.

- a) Écrire la relation de récurrence vérifiée par (c_n) .
- b) Calculer c_1 , c_2 et c_3 .
- c) Pourquoi ne peut-on pas utiliser ici la formule $c_n = c_0 \times q^n$?
- d) Comment calculer c_{15} ?