Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : algorithmes du programme et débogage

Algorithmique et Python — Première spé maths

Exercices

Méthode

On met en œuvre les **algorithmes du programme** (seuil, dichotomie, sommes, simulations, méthode d'Euler), on justifie **terminaison** et **correction**, et l'on **débogue** des scripts fautifs.

Exercice 1 – Méthode d'Euler

Appliquer la méthode d'Euler à $y' = 2y$ avec $y(0) = 1$, pas $h = 0{,}25$, sur $[0\,;1]$. Comparer à la solution exacte.

Exercice 2 – Déboguer un calcul de somme

Ce script doit calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Trouver les erreurs.

```
def harmonique(n):
    s = 0
    for k in range(n):
        s = s + 1 / k
    return s
```

Exercice 3 – Dichotomie avec compteur

Écrire un script résolvant $x^2 = 7$ par dichotomie sur $[2\,;3]$ avec compteur, à 10^{-4} près.

Exercice 4 – Algorithme de seuil sur un modèle

Un lac perd 8 % de son volume par an et reçoit 600 m³. Il contient 12 000 m³. Écrire un script donnant l'année où il passe sous 9000 m³, et justifier la terminaison.

Exercice 5 – Invariant de boucle

Énoncer un invariant prouvant la correction de ce script, et donner le résultat.

```
s = 0
p = 1
for k in range(1, 6):
    p = p * k
    s = s + p
print(s)
```

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Déboguer une simulation

Ce script doit estimer $P(X \geq 2)$ pour $X \sim B(5\,;0{,}4)$. Trouver les deux erreurs.

```
from random import random

c = 0
for i in range(10000):
    s = 0
    for j in range(5):
        if random() < 0.6:
            s = s + 1
    if s > 2:
        c = c + 1
print(c / 10000)
```

Exercice 7 – Somme de termes d'une suite

Écrire un script calculant $\sum_{k=0}^{20} u_k$ pour $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 0{,}8u_n + 1$, puis vérifier par le calcul.

Exercice 8 – Balayage pour un extremum

Écrire un script trouvant, par balayage de pas $0{,}01$, le maximum de $f(x) = x(4 - x^2)$ sur $[0\,;2]$, puis comparer au calcul exact.

Exercice 9 – Algorithme de dichotomie générique

Écrire une fonction de dichotomie générique prenant f, a, b et une précision, puis l'appliquer à $f(x) = x^3 + x - 3$ sur $[1\,;2]$.

Exercice 10 – Coût comparé de deux algorithmes

Pour trouver n tel que $1{,}02^n > 100$, comparer une boucle et une dichotomie sur n.

Exercice 11 – Déboguer une méthode d'Euler

Ce script applique Euler à $y' = -y$ avec $y(0) = 1$. Trouver l'erreur et prévoir le résultat correct pour $h = 0{,}5$ sur $[0\,;2]$.

```
h = 0.5
y = 1.0
for k in range(4):
    y = y + h * y
print(y)
```

Exercice 12 – Simulation et intervalle de fluctuation

Écrire un script simulant 200 échantillons de 100 lancers de pièce et comptant ceux dont la fréquence sort de $[0{,}4\,;0{,}6]$. Prévoir le résultat.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Calcul d’une somme double

Écrire un script calculant $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} ij$, puis vérifier par factorisation.

Exercice 14 – Recherche dans une liste triée

Écrire une recherche dichotomique dans une liste triée, et comparer son coût à une recherche linéaire pour $n = 10^6$.

Exercice 15 – Détecter une boucle infinie

Parmi ces boucles, lesquelles se terminent ? Justifier.

a) $u = 1.0$ puis *while u < 1000: u = 1.1 * u*
b) $u = 1.0$ puis *while u > 0.001: u = u - 0.0001*
c) $u = 10.0$ puis *while u > 1: u = u / 2 + 0.4*
d) $u = 1.0$ puis *while u != 0: u = u / 2*

Exercice 16 – Synthèse : étude algorithmique complète

Soit $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{3}{u_n}$.

a) Calculer u_1 à u_4.
b) Identifier la limite et justifier.
c) Écrire un script donnant le premier rang où $\left|u_n^2 - 6\right| < 10^{-8}$, et prévoir le résultat.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).