Plaquette 2 – Calculs de dérivées : produits, quotients et puissances

Dérivation et étude des fonctions — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dérivées de référence (pour n entier relatif) :

$f(x)$	k	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	0	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (pour $x>0$)

Opérations.

$$(u+v)' = u' + v' \qquad (ku)' = ku' \qquad (uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Méthode. Reconnaître la structure ; poser u et v et calculer u', v' à part ; appliquer la formule dans le bon ordre ; factoriser le numérateur en gardant le dénominateur sous forme de carré, qui est positif.

Un carré u^2 se dérive comme le produit $u \times u$: $(u^2)' = u'u + uu' = 2u'u$.

Contrôle. On compare $f'(a)$ au taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ pour $h = 0{,}001$.

Pièges. $(uv)' \neq u'v'$; au numérateur du quotient, c'est $u'v - uv'$ et non l'inverse ; la racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Correction de l'exercice 1 – Somme et multiple

On dérive terme à terme, en utilisant $(x^n)' = nx^{n-1}$ et $(ku)' = ku'$: $\left(5x^4\right)' = 20x^3$, $\left(-3x^3\right)' = -9x^2$, $\left(\dfrac{x^2}{2}\right)' = \dfrac{2x}{2} = x$, $(-7x)' = -7$, et la constante 9 a une dérivée nulle. Ainsi

$$f'(x) = 20x^3 - 9x^2 + x - 7$$

En 2 : $f'(2) = 160 - 36 + 2 - 7 = 119$. **Contrôle** : $f(2) = 80 - 24 + 2 - 14 + 9 = 53$ et $f(2{,}001) \approx 53{,}11910$, d'où un taux de variation d'environ $\dfrac{0{,}11910}{0{,}001} = 119{,}10$, très proche de 119. La constante 9 a disparu : deux fonctions qui diffèrent d'une constante ont la même dérivée.

Réponse. $f'(x) = 20x^3 - 9x^2 + x - 7$ et $f'(2) = 119$.

Correction de l'exercice 2 – Produit simple

Par la formule du produit. On pose $u = 3x - 1$ et $v = x^2 + 2$, donc $u' = 3$ et $v' = 2x$. Alors

$$f'(x) = 3\left(x^2+2\right) + (3x-1) \times 2x = 3x^2 + 6 + 6x^2 - 2x = 9x^2 - 2x + 6$$

En développant d'abord. $f(x) = 3x^3 - x^2 + 6x - 2$, dont la dérivée est $9x^2 - 2x + 6$: on retrouve le même résultat, ce qui valide le calcul.

Variations. Le discriminant de $9x^2 - 2x + 6$ vaut $4 - 4 \times 9 \times 6 = -212 < 0$: ce trinôme

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

garde le signe de son coefficient 9, il est strictement positif. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On note au passage que $u'v' = 6x$ n'a rien à voir avec $f'(x)$: la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

Réponse. $f'(x) = 9x^2 - 2x + 6 > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3 – Quotient simple

On pose $u = 3x + 2$ et $v = x - 4$, d'où $u' = 3$ et $v' = 1$. La formule du quotient donne

$$f'(x) = \frac{3(x-4) - (3x+2)\times 1}{(x-4)^2} = \frac{3x - 12 - 3x - 2}{(x-4)^2} = \frac{-14}{(x-4)^2}$$

Le dénominateur est un carré non nul, donc $f'(x) < 0$: f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;4[$ et sur $]4\,;+\infty[$. On ne peut pas dire « décroissante sur $\mathbb{R}\setminus\{4\}$ » : $f(0) = -0{,}5$ est inférieur à $f(5) = 17$ alors que $0 < 5$.

Autre écriture. $3 + \dfrac{14}{x-4} = \dfrac{3(x-4)+14}{x-4} = \dfrac{3x+2}{x-4}$. En dérivant avec $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$, on obtient $f'(x) = 14 \times \left(-\dfrac{1}{(x-4)^2}\right)$, le même résultat.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{-14}{(x-4)^2} < 0$: f est décroissante sur chacun des deux intervalles.

Correction de l'exercice 4 – Dériver un carré

On écrit $f = u \times u$ avec $u = x^2 - 3x$ et $u' = 2x - 3$. La formule du produit donne $f' = u'u + uu' = 2u'u$, soit

$$f'(x) = 2(2x-3)\left(x^2 - 3x\right) = 2x(2x-3)(x-3)$$

Les facteurs s'annulent en 0, 1,5 et 3. On étudie le signe de chacun : $2x$ change de signe en 0, $2x - 3$ en 1,5, $x - 3$ en 3. Le produit est négatif sur $]-\infty\,;0[$, positif sur $]0\,;1{,}5[$, négatif sur $]1{,}5\,;3[$ et positif sur $]3\,;+\infty[$.

x	$]-\infty\,;0]$	$[0\,;1{,}5]$	$[1{,}5\,;3]$	$[3\,;+\infty[$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	décroissante	croissante	décroissante	croissante

Les minimums valent $f(0) = f(3) = 0$, et le maximum local $f(1{,}5) = (2{,}25 - 4{,}5)^2 = 5{,}0625$.

Réponse. $f'(x) = 2x(2x-3)(x-3)$; minimums 0 en 0 et en 3, maximum local 5,0625 en 1,5.

Correction de l'exercice 5 – Produit avec une racine carrée

On pose $u = x - 1$ et $v = \sqrt{x}$, d'où $u' = 1$ et $v' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x > 0$. La formule du produit donne

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x-1}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$$

en multipliant $\sqrt{x}$ par $\dfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ pour réduire au même dénominateur, puisque $\sqrt{x}\times\sqrt{x} = x$.

Le dénominateur est positif pour $x > 0$: $f'(x)$ a le signe de $3x - 1$, négatif sur $\left]0\,;\dfrac{1}{3}\right[$ et positif ensuite. La fonction est décroissante sur $\left[0\,;\dfrac{1}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$. Son minimum vaut

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \approx -0{,}385$$

Réponse. $f'(x) = \dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$; minimum $-\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \approx -0{,}385$ en $x = \dfrac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 6 – Quotient à numérateur du second degré

Avec $u = x^2 + 1$, $v = 2x - 1$, $u' = 2x$ et $v' = 2$:

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2\left(x^2+1\right)}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2}{(2x-1)^2} = \frac{2\left(x^2 - x - 1\right)}{(2x-1)^2}$$

Le trinôme $x^2 - x - 1$ a pour discriminant 5 et pour racines $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0{,}618$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$. Il est positif à l'extérieur de ces racines : f croît jusqu'à x_1, décroît sur $\left]x_1 ; \frac{1}{2}\right[$ puis sur $\left]\frac{1}{2} ; x_2\right]$, et croît après x_2. Elle admet un maximum local en x_1 et un minimum local en x_2.

On calcule $f(x_1) \approx -0{,}618$ et $f(x_2) \approx 1{,}618$: les valeurs des extremums sont égales à leurs abscisses. Ce n'est pas un hasard : l'équation $f(x) = x$ s'écrit $x^2 + 1 = 2x^2 - x$, soit $x^2 - x - 1 = 0$, l'équation qui annule f'.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{2\left(x^2 - x - 1\right)}{(2x-1)^2}$; maximum local $\approx -0{,}618$ en $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, minimum local $\approx 1{,}618$ en $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Correction de l'exercice 7 – Produit avec racine, croissance

On pose $u = x + 2$ et $v = \sqrt{x}$, donc $u' = 1$ et $v' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. La formule du produit donne

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x+2}{2\sqrt{x}} = \frac{2x + x + 2}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x}}$$

Pour $x > 0$, numérateur et dénominateur sont strictement positifs : $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ (elle vaut 0 en 0 et augmente ensuite).

Contrôle. $f'(4) = \dfrac{14}{4} = 3{,}5$. Par ailleurs $f(4) = 6 \times 2 = 12$ et $f(4{,}001) \approx 12{,}003\,50$, d'où un taux de variation d'environ 3,500. Le calcul est validé. La dérivée n'est pas définie en 0, car $\sqrt{x}$ n'y est pas dérivable.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{3x+2}{2\sqrt{x}} > 0$: f est croissante ; $f'(4) = 3{,}5$.

Correction de l'exercice 8 – L'inverse d'une fonction

On pose $v(x) = x^2 + 1$, qui ne s'annule jamais, et $v'(x) = 2x$. La formule $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$ donne

$$f'(x) = -\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Le dénominateur est positif : $f'(x)$ a le signe de $-x$. La fonction f est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et décroissante sur $[0 ; +\infty[$: elle admet un maximum en 0, égal à $f(0) = 1$.

Comme $x^2 + 1 > 0$, on a aussi $f(x) > 0$. Pour tout réel x :

$$0 < f(x) \leq 1$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

On peut le vérifier directement : $x^2+1 \geq 1$ donc son inverse est au plus 1. La fonction est paire, car $f(-x)=f(x)$: sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, ce qui est cohérent avec les variations.

Réponse. $f'(x) = -\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$; maximum 1 en 0 ; $0 < f(x) \leq 1$.

Correction de l'exercice 9 – Trois facteurs

On regroupe $v=(x-2)(x+3)=x^2+x-6$, de dérivée $v'=2x+1$, et l'on pose $u=x$. Alors

$$f'(x) = \left(x^2+x-6\right) + x(2x+1) = 3x^2+2x-6$$

Contrôle : $f(x)=x^3+x^2-6x$, dont la dérivée est bien $3x^2+2x-6$.

Le discriminant de $3x^2+2x-6$ vaut $4+72=76$; les racines sont $\dfrac{-1-\sqrt{19}}{3} \approx -1{,}786$ et $\dfrac{-1+\sqrt{19}}{3} \approx 1{,}120$. La dérivée est positive à l'extérieur des racines : f croît, décroît, puis croît. On obtient un maximum local $f(-1{,}786) \approx 8{,}209$ et un minimum local $f(1{,}120) \approx -4{,}061$. Chaque extremum se trouve entre deux racines consécutives de f (-3, 0 et 2), ce qui est cohérent avec l'allure de la courbe.

Réponse. $f'(x)=3x^2+2x-6$; maximum local $\approx 8{,}209$ en $\approx -1{,}786$, minimum local $\approx -4{,}061$ en $\approx 1{,}120$.

Correction de l'exercice 10 – Quotient avec racine

Avec $u=\sqrt{x}$, $v=x+2$, $u'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v'=1$, le numérateur de la formule du quotient vaut

$$\frac{x+2}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{x+2-2x}{2\sqrt{x}} = \frac{2-x}{2\sqrt{x}}$$

d'où $f'(x) = \dfrac{2-x}{2\sqrt{x}\,(x+2)^2}$. Le dénominateur est positif : f' a le signe de $2-x$. La fonction croît sur $]0\,;2]$ et décroît sur $[2\,;+\infty[$; son maximum vaut $f(2)=\dfrac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}354$.

On a $f(1)=\dfrac{1}{3}$ et $f(4)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$. Plus généralement, $f\left(\dfrac{4}{x}\right) = \dfrac{2/\sqrt{x}}{4/x+2} = \dfrac{2\sqrt{x}}{4+2x} = f(x)$: les valeurs prises en x et en $\dfrac{4}{x}$ sont égales, et 1 et 4 sont de part et d'autre de 2, où se trouve le maximum.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{2-x}{2\sqrt{x}(x+2)^2}$; maximum $\dfrac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}354$ en $x=2$; $f\left(\frac{4}{x}\right)=f(x)$.

Correction de l'exercice 11 – Puissances d'exposant négatif

On écrit $f(x)=2x^{-3}-x^{-2}$. La formule $(x^n)'=nx^{n-1}$ vaut pour tout entier relatif n, donc

$$f'(x) = 2\times(-3)x^{-4} - (-2)x^{-3} = -\frac{6}{x^4} + \frac{2}{x^3} = \frac{2x-6}{x^4} = \frac{2(x-3)}{x^4}$$

en réduisant au dénominateur x^4. Sur $]0\,;+\infty[$, $x^4>0$: $f'(x)$ a le signe de $x-3$. La fonction f est décroissante sur $]0\,;3]$ et croissante sur $[3\,;+\infty[$. Elle admet donc un minimum en 3 :

$$f(3) = \frac{2}{27} - \frac{1}{9} = \frac{2-3}{27} = -\frac{1}{27}$$

Contrôle : $f(2)=\dfrac{2}{8}-\dfrac{1}{4}=0$ et $f(4)=\dfrac{2}{64}-\dfrac{1}{16}=-\dfrac{1}{32}$ sont bien supérieurs à $-\dfrac{1}{27} \approx -0{,}037$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $f'(x) = \dfrac{2(x-3)}{x^4}$; minimum $-\dfrac{1}{27}$ en $x = 3$.

Correction de l'exercice 12 – Dérivée et tangente

On calcule d'abord $f(2) = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$. Avec $u = x$ et $v = x^2 + 1$:

$$f'(x) = \frac{\left(x^2+1\right) - x \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

d'où $f'(2) = \dfrac{1-4}{25} = -0{,}12$. La tangente a pour équation $y = f'(2)(x-2) + f(2)$, soit $y = -0{,}12(x-2) + 0{,}4 = -0{,}12x + 0{,}64$.

Elle coupe l'axe des abscisses quand $-0{,}12x + 0{,}64 = 0$, c'est-à-dire en $x = \dfrac{0{,}64}{0{,}12} = \dfrac{16}{3} \approx 5{,}33$. La pente négative est cohérente avec les variations : f' a le signe de $1 - x^2$, donc f décroît sur $[1\,;+\infty[$, où se trouve le point d'abscisse 2.

Réponse. $y = -0{,}12x + 0{,}64$; elle coupe l'axe des abscisses en $x = \dfrac{16}{3}$.

Correction de l'exercice 13 – Trouver une fonction à partir de conditions

La condition $f(0) = 2$ donne directement $c = 2$. La dérivée vaut $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$; une tangente horizontale en 1 signifie $f'(1) = 0$, soit $3a + 2b = 0$. Enfin $f(1) = 0$ donne $a + b + 2 = 0$, donc $b = -a - 2$. En reportant, $3a - 2a - 4 = 0$, d'où

$$a = 4 \qquad b = -6 \qquad c = 2$$

On vérifie : $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$, $f(0) = 2$, $f(1) = 0$ et $f'(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$, nulle en 1.

Le signe de $12x(x-1)$ est positif à l'extérieur de $[0\,;1]$: f croît jusqu'à 0, décroît sur $[0\,;1]$ puis croît. Elle admet un maximum local $f(0) = 2$ et un minimum local $f(1) = 0$. On peut d'ailleurs factoriser $f(x) = 2(x-1)^2(2x+1)$, ce qui montre que la courbe touche l'axe des abscisses en 1 sans le traverser.

Réponse. $a = 4$, $b = -6$, $c = 2$; maximum local 2 en 0, minimum local 0 en 1.

Correction de l'exercice 14 – Un quotient simplifié d'abord

Formule du quotient. Avec $u = (x+1)^2$, dont la dérivée vaut $2(x+1)$ (dérivée d'un carré), et $v = x$:

$$f'(x) = \frac{2(x+1)x - (x+1)^2}{x^2} = \frac{(x+1)(2x-x-1)}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

Après simplification. $\dfrac{x^2+2x+1}{x} = x + 2 + \dfrac{1}{x}$, d'où $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$: même résultat, obtenu plus vite.

La dérivée est positive pour $x < -1$ et pour $x > 1$, négative sur $]-1\,;0[$ et sur $]0\,;1[$. Il y a un maximum local $f(-1) = 0$ et un minimum local $f(1) = 4$. Le maximum local est plus petit que le minimum local : ce n'est pas contradictoire, car ces extremums sont pris sur deux intervalles séparés par la valeur interdite 0.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$; maximum local 0 en -1, minimum local 4 en 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – L’inverse d’un carré

On écrit $v = w \times w$ avec $w = x^2 + 1$ et $w' = 2x$. Alors $v' = w'w + ww' = 2 \times 2x \times \left(x^2+1\right) = 4x\left(x^2+1\right)$. La formule de la dérivée de l’inverse donne

$$f'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} = -\frac{4x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4} = -\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^3}$$

après simplification par x^2+1, qui n’est jamais nul.

En 1 : $f'(1) = -\dfrac{4}{8} = -0{,}5$. **Contrôle** : $f(1) = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$ et $f(1{,}001) = \dfrac{1}{2{,}002\,001^2} \approx 0{,}249\,50$, d’où un taux de variation d’environ $-0{,}4995$. La dérivée a le signe de $-x$: f croît sur $]-\infty\,;0]$, décroît sur $[0\,;+\infty[$, et son maximum est $f(0) = 1$.

Réponse. $f'(x) = -\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^3}$; $f'(1) = -0{,}5$; maximum 1 en 0.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : trois dérivées à factoriser

a) Avec $u = x^2 - 4$ et $v = \sqrt{x}$: $f'(x) = 2x\sqrt{x} + \dfrac{x^2-4}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4x^2+x^2-4}{2\sqrt{x}} = \dfrac{5x^2-4}{2\sqrt{x}}$. Elle est négative pour $0 < x < \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ et positive ensuite : f admet un minimum en $\dfrac{2}{\sqrt{5}} \approx 0{,}894$.

b) Avec $u = 2x$ et $v = x^2+1$:

$$g'(x) = \frac{2\left(x^2+1\right) - 2x \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Elle a le signe de $1 - x^2$: g décroît sur $]-\infty\,;-1]$, croît sur $[-1\,;1]$ et décroît sur $[1\,;+\infty[$.

c) Avec $u = x^3$ et $v = (x-1)^2$, de dérivée $2(x-1)$: le numérateur vaut $3x^2(x-1)^2 - 2x^3(x-1) = x^2(x-1)(x-3)$, d’où $h'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$. Elle est positive sur $]-\infty\,;1[$ (sauf en 0, où elle s’annule sans changer de signe), négative sur $]1\,;3[$, positive sur $]3\,;+\infty[$: minimum local $h(3) = \dfrac{27}{4}$.

d) D’après b) : sur $]-\infty\,;-1]$, g décroît, donc $g(x) \geq g(-1) = -1$, et $g(x) < 0 \leq 1$ car $2x < 0$. Sur $[-1\,;1]$, g croît de $g(-1) = -1$ à $g(1) = 1$. Sur $[1\,;+\infty[$, g décroît, donc $g(x) \leq g(1) = 1$, et $g(x) > 0 \geq -1$. Dans tous les cas, $-1 \leq g(x) \leq 1$. **Vérification directe** : $1 - g(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1} \geq 0$ et $g(x) + 1 = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0$.

Réponse. a) $\dfrac{5x^2-4}{2\sqrt{x}}$; b) $\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$; c) $\dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$; d) $1 - g(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$ et $g(x) + 1 = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).