

Plaquette 2 - Calculs de dérivées : produits, quotients et puissances

Dérivation et étude des fonctions — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules d'opérations.

$$(u + v)' = u' + v' \quad (ku)' = ku' \quad (uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu'u^{n-1} \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (u(ax + b))' = a u'(ax + b)$$

Dérivées de référence.

$f(x)$	k	x	x^2	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	0	1	$2x$	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Méthode en quatre temps.

1. **Reconnaître** la structure (somme, produit, quotient, puissance). 2. **Poser** u et v , calculer u' et v' **à part**. 3. **Appliquer** la formule sans se tromper d'ordre (attention au signe du quotient). 4. **Factoriser** le numérateur, garder le dénominateur sous forme de carré.

Contrôle numérique systématique. On compare $f(a)$ au taux $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ pour $h = 10^{-3}$ — un bon réflexe qui détecte immédiatement une erreur de formule.

Pièges les plus fréquents.

- $(uv)' \neq u'v'$;
- oublier u' dans $(u^n)'$ — le test $f(a) = 0$ là où $u' = 0$ le révèle ;
- inverser l'ordre au numérateur du quotient : c'est $u'v - uv'$, **pas** $uv' - u'v$.

Correction de l'exercice 1 - Somme et multiple

— **Terme à terme :**

$$f(x) = 20x^3 - 9x^2 + x - 7$$

— **Détails :** $(5x^4)' = 20x^3$; $(-3x^3)' = -9x^2$; $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$; $(-7x)' = -7$; $(9)' = 0$.

— **Contrôle numérique :** $f(2) = 80 - 24 + 2 - 14 + 9 = 53$ et $f'(2) = 160 - 36 + 2 - 7 = 119$.

— **Taux :** $f(2,001) \approx 53,11910$, donc $\frac{0,11910}{0,001} \approx 119,10$ ✓

— **Degré :** la dérivée d'un polynôme de degré 4 est de degré 3 ✓

— **Contrôle du signe en 0 :** $f'(0) = -7 < 0$, donc f décroît au voisinage de 0.

— **Contrôle :** $f(0) = 9$ et $f(0,1) = 0,0005 - 0,003 + 0,005 - 0,7 + 9 = 8,3025 < 9$ ✓

- **Piège de la constante** : le +9 **disparaît** dans la dérivée — deux fonctions différant d'une constante ont la même dérivée.

Réponse. $f(x) = 20x^3 - 9x^2 + x - 7$.

Correction de l'exercice 2 - Produit simple

Formule du produit. $u = 3x - 1$, $v = x^2 + 2$, donc $u' = 3$ et $v' = 2x$.

$$f'(x) = 3(x^2 + 2) + (3x - 1)(2x) = 3x^2 + 6 + 6x^2 - 2x = 9x^2 - 2x + 6$$

Développement préalable.

- $f(x) = 3x^3 + 6x - x^2 - 2 = 3x^3 - x^2 + 6x - 2$.
- $f'(x) = 9x^2 - 2x + 6$ ✓ — **même résultat**, le calcul est validé.
- **Contrôle numérique** : $f(1) = 9 - 2 + 6 = 13$; et $f'(1) = 2 \times 3 = 6$, $f(1,001) \approx 6,01301$, soit un taux de 13,008 ✓
- **Signe de f'** : le discriminant vaut $4 - 216 = -212 < 0$, donc f' est **toujours positive** : f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ✓
- **Piège** : $u'v' = 3 \times 2x = 6x$, très différent de $9x^2 - 2x + 6$ ✓
- **Conseil** : quand le développement est facile, il sert de **contrôle** gratuit.

Réponse. $f'(x) = 9x^2 - 2x + 6$.

Correction de l'exercice 3 - Quotient simple

- **Identification** : $u = 3x + 2$, $v = x - 4$, donc $u' = 3$ et $v' = 1$.
- **Formule** :

$$f'(x) = \frac{3(x - 4) - (3x + 2)}{(x - 4)^2} = \frac{3x - 12 - 3x - 2}{(x - 4)^2} = \frac{-14}{(x - 4)^2}$$

- **Signe** : $(x - 4)^2 > 0$, donc $f'(x) < 0$ — la fonction est **décroissante** sur chacun de ses deux intervalles.
- **Contrôle par la règle** : $ad - bc = 3 \times (-4) - 2 \times 1 = -14$ ✓
- **Contrôle numérique** : $f(5) = -14$; et $f'(5) = \frac{17}{1} = 17$, $f(5,001) \approx 16,98601$, soit un taux de -13,986 ✓
- **Réécriture** : $f(x) = \frac{3(x - 4) + 14}{x - 4} = 3 + \frac{14}{x - 4}$, ce qui donne directement $f'(x) = -\frac{14}{(x - 4)^2}$ ✓
- **Asymptotes** : $x = 4$ et $y = 3$.
- **Attention** : la décroissance vaut **sur chaque intervalle**, pas globalement — $f(0) = -0,5$ mais $f(5) = 17$.

Réponse. $f'(x) = \frac{-14}{(x - 4)^2} < 0$.

Correction de l'exercice 4 - Puissance d'une fonction

- **Formule** : $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ avec $u = 2x^2 - 3x$, $u' = 4x - 3$ et $n = 5$.

$$f'(x) = 5(4x - 3)(2x^2 - 3x)^4$$

- **Racines de f'** : $x = \frac{3}{4}$ (du facteur $4x - 3$) et $x \in \left\langle 0; \frac{3}{2} \right\rangle$ (de $u = 0$).

- **Contrôle numérique** : $f(2) = 5 \times 5 \times 2^4 = 25 \times 16 = 400$; et $f(2) = 2^5 = 32$, $f(2,001) \approx 32,40217$, soit un taux de 402,17 ✓
- **Contrôle en $x = 0$** : $f(0) = 5 \times (-3) \times 0 = 0$ ✓ — cohérent, car $u(0) = 0$ annule aussi u^4 .
- **Erreur classique** : oublier $u' = 4x - 3$ donnerait $5(2x^2 - 3x)^4$, qui ne s'annule pas en $x = \frac{3}{4}$ — le test de cette valeur révèle immédiatement l'erreur.
- **Vérification en $x = 0,75$** : $u(0,75) = 1,125 - 2,25 = -1,125$, donc $f(0,75) = (-1,125)^5 \approx -1,8020$ — un **extremum local** puisque f' s'y annule en changeant de signe ✓
- **Parité des puissances** : $u^4 \geq 0$ toujours, donc le signe de f est celui de $4x - 3$ (sauf aux racines de u) ✓

Réponse. $f(x) = 5(4x - 3)(2x^2 - 3x)^4$.

Correction de l'exercice 5 - Racine d'une fonction

- **Domaine de définition** : $x^2 + 3x = x(x + 3) \geq 0$, soit $x \leq -3$ ou $x \geq 0$.
 - **Domaine de dérivabilité** : il faut de plus $x^2 + 3x \neq 0$, donc $] - \infty ; -3[\cup]0 ; +\infty[$.
 - **Formule** : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u' = 2x + 3$.
- $$f(x) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}$$
- **Signe** : sur $]0 ; +\infty[$, $2x + 3 > 0$, donc f est **positive** ; sur $] - \infty ; -3[$, $2x + 3 < 0$, donc f est **négative**.
 - **Variations** : décroissante sur $] - \infty ; -3[$, croissante sur $]0 ; +\infty[$.
 - **Contrôle numérique** : $f(1) = \frac{5}{2 \times 2} = 1,25$; et $f(1) = 2$, $f(1,001) \approx 2,00125$, soit un taux de 1,2499 ✓
 - **Tangentes verticales** : en $x = 0$ et $x = -3$, f tend vers $\pm\infty$ — la fonction n'y est pas dérivable ✓
 - **Valeurs** : $f(0) = 0$, $f(-3) = 0$, $f(1) = 2$, $f(-4) = \sqrt{16 - 12} = 2$ ✓
 - **Remarque** : la fonction n'est **pas définie** sur $] - 3 ; 0[$ — son ensemble de définition est en **deux morceaux**.

Réponse. $f(x) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}$ sur $] - \infty ; -3[\cup]0 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 6 - Quotient à numérateur du second degré

- **Identification** : $u = x^2 + 1$, $v = 2x - 1$, donc $u' = 2x$ et $v' = 2$.
 - **Formule** :
- $$f(x) = \frac{2x(2x - 1) - 2(x^2 + 1)}{(2x - 1)^2} = \frac{4x^2 - 2x - 2x^2 - 2}{(2x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 2}{(2x - 1)^2}$$
- **Factorisation** : $f(x) = \frac{2(x^2 - x - 1)}{(2x - 1)^2}$.
 - **Racines du numérateur** : $\Delta = 1 + 4 = 5$, donc $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, soit environ $-0,6180$ et $1,6180$ — le **nombre d'or** et son conjugué ✓
 - **Signe** : positive à l'extérieur de ces racines, négative à l'intérieur (hors $x = 0,5$).

- **Contrôle numérique** : $f(2) = \frac{2(4-2-1)}{9} = \frac{2}{9} \approx 0,2222$; et $f(2) = \frac{5}{3} \approx 1,66667$, $f(2,001) \approx 1,66689$, soit un taux de 0,2224 ✓
- **Extremums** : $f(-0,6180) = \frac{1,3820}{-2,2361} \approx -0,6180$ (maximum local) et $f(1,6180) = \frac{3,6180}{2,2361} \approx 1,6180$ (minimum local) ✓
- **Coïncidence remarquable** : les valeurs des extremums égalent les abscisses ! C'est une propriété de cette fonction particulière.
- **Vérification** : $f(x) = x$ donne $x^2 + 1 = 2x^2 - x$, soit $x^2 - x - 1 = 0$ — exactement le numérateur de f ✓

Réponse. $f(x) = \frac{2(x^2 - x - 1)}{(2x - 1)^2}$.

Correction de l'exercice 7 - Produit avec racine

- **Formule du produit** : $u = x + 2$, $v = \sqrt{x}$, donc $u' = 1$ et $v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{x+2}{2\sqrt{x}}$$
- **Mise au même dénominateur** :

$$f(x) = \frac{2x + x + 2}{2\sqrt{x}} = \frac{3x + 2}{2\sqrt{x}}$$
- **Signe** : strictement positive pour $x > 0$ — la fonction est **croissante** ✓
- **Contrôle numérique** : $f(4) = \frac{14}{4} = 3,5$; et $f(4) = 6 \times 2 = 12$, $f(4,001) \approx 12,00350$, soit un taux de 3,5002 ✓
- **Méthode alternative** : $f(x) = x^{3/2} + 2x^{1/2}$, donc $f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} + x^{-1/2} = \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.
- **Cohérence** : $\frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{3x + 2}{2\sqrt{x}}$ ✓
- **Contrôle en $x = 1$** : $f(1) = \frac{5}{2} = 2,5$ des deux façons ✓
- **Comportement en 0^+** : $f(x) \rightarrow +\infty$ — tangente verticale, la fonction n'est pas dérivable en 0.

Réponse. $f(x) = \frac{3x + 2}{2\sqrt{x}}$.

Correction de l'exercice 8 - Fonction composée affine

Première fonction. $u = 5 - 2x$ et $u' = -2$:

$$f(x) = 3 \times (-2) \times (5 - 2x)^2 = -6(5 - 2x)^2$$

- **Signe** : $(5 - 2x)^2 \geq 0$, donc $f(x) \leq 0$ — la fonction est **décroissante** sur $\mathbb{R}$ ✓
- **Contrôle numérique** : $f(2) = -6 \times 1 = -6$; et $f(2) = 1$, $f(2,001) \approx 0,99401$, soit un taux de -5,988 ✓
- **Point particulier** : $f(2,5) = 0$ mais ce n'est **pas** un extremum (la dérivée ne change pas de signe) ✓

Seconde fonction. $v = 3x + 1$ et $v' = 3$:

$$g'(x) = -\frac{3}{(3x + 1)^2}$$

- **Signe** : toujours négative — g est décroissante sur chacun de ses intervalles ($x \neq -\frac{1}{3}$) ✓
- **Contrôle numérique** : $g'(1) = -\frac{3}{16} = -0,1875$; et $g(1) = 0,25$, $g(1,001) \approx 0,24981$, soit un taux de $-0,1874$ ✓
- **Règle générale** : $(u(ax + b))' = a u'(ax + b)$ — le facteur a est le « coût » du changement de variable, et l'oublier est l'erreur la plus courante.

Réponse. $f(x) = -6(5 - 2x)^2$ et $g'(x) = \frac{-3}{(3x + 1)^2}$.

Correction de l'exercice 9 - Trois facteurs

Méthode par regroupement. $u = x$ et $v = (x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$, donc $v' = 2x + 1$.

$$f(x) = (x^2 + x - 6) + x(2x + 1) = x^2 + x - 6 + 2x^2 + x = 3x^2 + 2x - 6$$

Contrôle par développement.

- $f(x) = x(x^2 + x - 6) = x^3 + x^2 - 6x$.
- $f(x) = 3x^2 + 2x - 6$ ✓
- **Racines de f** : $\Delta = 4 + 72 = 76$, donc $x = \frac{-2 \pm \sqrt{76}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{3}$, soit environ $-1,7863$ et $1,1196$.
- **Contrôle numérique** : $f(1) = 3 + 2 - 6 = -1$; et $f(1) = 1 \times (-1) \times 4 = -4$, $f(1,001) \approx -4,00100$, soit un taux de $-0,996$ ✓
- **Extremums** : $f(-1,7863) \approx 8,2088$ (maximum local) et $f(1,1196) \approx -4,0607$ (minimum local) ✓
- **Racines de f** : -3 , 0 et 2 ✓
- **Cohérence** : les deux extremums se situent bien entre les racines consécutives ($-1,79$ entre -3 et 0 ; $1,12$ entre 0 et 2) ✓

Réponse. $f(x) = 3x^2 + 2x - 6$.

Correction de l'exercice 10 - Quotient avec racine

- **Identification** : $u = \sqrt{x}$, $v = x + 2$, donc $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v' = 1$.
- **Formule** :

$$f(x) = \frac{\frac{x+2}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+2)^2}$$

- **Simplification du numérateur** : $\frac{x+2}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{x+2-2x}{2\sqrt{x}} = \frac{2-x}{2\sqrt{x}}$.

$$f(x) = \frac{2-x}{2\sqrt{x}(x+2)^2}$$

- **Signe** : le dénominateur est positif, donc f a le signe de $2 - x$ — positive avant 2 , négative après.
- **Maximum** : $f(2) = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,35355$ ✓
- **Contrôle numérique** : $f(1) = \frac{1}{2 \times 9} = \frac{1}{18} \approx 0,05556$; et $f(1) = \frac{1}{3} \approx 0,33333$, $f(1,001) \approx 0,33339$, soit un taux de $0,05550$ ✓

- **Contrôles** : $f(1) \approx 0,3333$ et $f(4) = \frac{2}{6} \approx 0,3333$ — égaux, tous deux inférieurs au maximum ✓
- **Symétrie** : $f\left(\frac{4}{x}\right) = \frac{2/\sqrt{x}}{\frac{4}{x} + 2} = \frac{2/\sqrt{x} \times x}{4 + 2x} = \frac{2\sqrt{x}}{2(x+2)} = f(x)$ ✓ — d'où l'égalité $f(1) = f(4)$.
- **Limites** : $f(x) \rightarrow 0$ en 0^+ et en $+\infty$ — une « bosse » de sommet $\left(2; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Réponse. $f(x) = \frac{2-x}{2\sqrt{x}(x+2)^2}$; maximum $\frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,354$ en $x = 2$.

Correction de l'exercice 11 - Dérivée seconde

- **Dérivée première** : $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x = 4x(x^2 - 3x + 3)$.
- **Signe de f'** : le trinôme $x^2 - 3x + 3$ a un discriminant $9 - 12 = -3 < 0$, il est donc toujours **positif** ; f' a le signe de x .
- **Variations** : décroissante sur $] -\infty ; 0]$, croissante sur $[0 ; +\infty[$, avec un minimum $f(0) = 0$ ✓
- **Dérivée seconde** :

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 12 = 12(x^2 - 2x + 1) = 12(x - 1)^2$$
- **Signe** : $f''(x) \geq 0$, nulle seulement en $x = 1$.
- **Points d'inflexion** : il faut que f' **change de signe** — or f' reste positive de part et d'autre de 1.
- **Conclusion** : la fonction est **convexe** sur $\mathbb{R}$ et n'a **aucun** point d'inflexion ✓
- **Contrôles** : $f''(0) = 12 > 0$ et $f''(2) = 48 - 48 + 12 = 12 > 0$ ✓
- **Valeur en 1** : $f(1) = 1 - 4 + 6 = 3$, avec $f'(1) = 4 - 12 + 12 = 4$ — la tangente $y = 4x - 1$ y est traversée ? Non : la convexité est conservée, la courbe reste **au-dessus** ✓
- **Leçon** : $f'(a) = 0$ ne suffit pas pour un point d'inflexion, exactement comme $f(a) = 0$ ne suffit pas pour un extremum.

Réponse. $f(x) = 4x(x^2 - 3x + 3)$, $f''(x) = 12(x - 1)^2 \geq 0$: convexe, aucun point d'inflexion.

Correction de l'exercice 12 - Dérivée et tangente

- **Valeur** : $f(2) = \frac{2}{5} = 0,4$.
- **Dérivée** : avec $u = x$ et $v = x^2 + 1$,

$$f(x) = \frac{(x^2 + 1) - x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$
- **Pente** : $f'(2) = \frac{1-4}{25} = -\frac{3}{25} = -0,12$.
- **Tangente** :

$$y = -0,12(x - 2) + 0,4 = -0,12x + 0,64$$
- **Contrôle du point** : $-0,24 + 0,64 = 0,4$ ✓
- **Contrôle numérique de la pente** : $f'(2,001) \approx 0,39988$, soit un taux de $-0,1200$ ✓
- **Variations de f** : f' a le signe de $1 - x^2$ — maximum $f(1) = 0,5$ et minimum $f(-1) = -0,5$ ✓
- **Position du point** : $x = 2 > 1$, donc on est dans la phase **décroissante** — cohérent avec une pente négative ✓

- **Imparité** : f est impaire, donc la tangente en $x = -2$ est $y = -0,12x - 0,64$ ✓
- **Intersection de la tangente avec l'axe des abscisses** : $x = \frac{0,64}{0,12} \approx 5,333$.

Réponse. $y = -0,12x + 0,64$.

Correction de l'exercice 13 - Trouver une dérivée à partir de conditions

- **Première condition** : $f(0) = c = 2$.
- **Dérivée** : $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$.
- **Deuxième condition** : $f'(1) = 3a + 2b = 0$.
- **Troisième condition** : $f(1) = a + b + 2 = 0$, donc $b = -a - 2$.
- **Substitution** : $3a + 2(-a - 2) = 0$ donne $a - 4 = 0$, soit

$$a = 4 \quad b = -6 \quad c = 2$$
- **Fonction** : $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$.
- **Vérifications** : $f(0) = 2$ ✓ ; $f(1) = 4 - 6 + 2 = 0$ ✓ ; $f'(x) = 12x^2 - 12x$, donc $f'(1) = 0$ ✓
- **Autre point critique** : $f'(x) = 12x(x - 1)$ s'annule aussi en $x = 0$, avec $f(0) = 2$.
- **Nature** : f passe de + à - en 0 (**maximum local** 2) et de - à + en 1 (**minimum local** 0) ✓
- **Contrôles** : $f(0,5) = 0,5 - 1,5 + 2 = 1$, entre 0 et 2 ✓ ; $f(-1) = -4 - 6 + 2 = -8$ ✓ ;
 $f(2) = 32 - 24 + 2 = 10$ ✓
- **Racine double en 1** : $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2 = 2(2x^3 - 3x^2 + 1) = 2(x - 1)^2(2x + 1)$ ✓
- **Contrôle du développement** :
 $2(x^2 - 2x + 1)(2x + 1) = 2(2x^3 + x^2 - 4x^2 - 2x + 2x + 1) = 2(2x^3 - 3x^2 + 1)$ ✓

Réponse. $a = 4$, $b = -6$, $c = 2$; $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$.

Correction de l'exercice 14 - Produit de deux quotients

Méthode 1 — formule du quotient. $u = (x + 1)^2$, $v = x$, donc $u' = 2(x + 1)$ et $v' = 1$.

$$f'(x) = \frac{2(x + 1)x - (x + 1)^2}{x^2} = \frac{(x + 1)[2x - (x + 1)]}{x^2} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Méthode 2 — développement préalable.

- $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = x + 2 + \frac{1}{x}$.
- $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ ✓ — **même résultat**.
- **Signe** : positive hors de $[-1 ; 1]$, négative à l'intérieur (sauf en 0, exclu).
- **Extremums** : $f(-1) = 0$ (**maximum local**) et $f(1) = 4$ (**minimum local**) ✓
- **Contrôle surprenant** : le maximum local (0) est inférieur au minimum local (4) — possible car ils sont séparés par l'asymptote $x = 0$ ✓
- **Contrôle numérique** : $f(2) = \frac{3}{4} = 0,75$; et $f(2) = \frac{9}{2} = 4,5$, $f(2,001) \approx 4,50075$, soit un taux de 0,7501 ✓
- **Contrôles de valeurs** : $f(-2) = \frac{1}{-2} = -0,5$ ✓ et $f(0,5) = \frac{2,25}{0,5} = 4,5$ ✓
- **Leçon** : la **simplification préalable** est souvent la voie la plus rapide et la plus sûre.

Réponse. $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ (avec $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$).

Correction de l'exercice 15 - Dérivée d'une puissance négative

— **Méthode de l'inverse** : $f = \frac{1}{v}$ avec $v = (x^2 + 1)^3$.

— **Dérivée de v** : $v' = 3 \times 2x \times (x^2 + 1)^2 = 6x(x^2 + 1)^2$.

— **Formule** :

$$f(x) = -\frac{6x(x^2 + 1)^2}{(x^2 + 1)^6} = \frac{-6x}{(x^2 + 1)^4}$$

— **Signe** : celui de $-x$ — positive avant 0, négative après.

— **Maximum** : $f(0) = 1$, maximum **global** ✓

— **Contrôle numérique** : $f(1) = \frac{-6}{16} = -0,375$; et $f(1) = \frac{1}{8} = 0,125$, $f(1,001) \approx 0,12463$, soit un taux de $-0,3744$ ✓

— **Parité** : f est **paire**, donc f est **impaire** ✓

— **Limites** : $f(x) \rightarrow 0$ en $\pm\infty$ ✓

— **Encadrement** : $0 < f(x) \leq 1$ pour tout x réel.

— **Contrôles** : $f(2) = \frac{1}{125} = 0,008$ ✓ ; $f(3) = \frac{1}{1000} = 0,001$ ✓ — la décroissance est très rapide.

— **Méthode alternative** : écrire $f = (x^2 + 1)^{-3}$ et appliquer $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ avec $n = -3$ donne $-3 \times 2x \times (x^2 + 1)^{-4}$ ✓ — même résultat.

Réponse. $f(x) = \frac{-6x}{(x^2 + 1)^4}$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : dérivées multiples

a) **Produit** : $u = x^2 - 4$, $v = \sqrt{x}$.

$$f(x) = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2 - 4}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2 + x^2 - 4}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2 - 4}{2\sqrt{x}}$$

— **Racine positive** : $x = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,89443$.

— **Contrôle numérique** : $f(1) = \frac{1}{2} = 0,5$; et $f(1) = -3$, $f(1,001) \approx -2,99950$, soit un taux de $0,5024$ ✓

b) **Quotient avec racine** : $u = 2x$, $v = \sqrt{x^2 + 1}$, donc $v' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

$$g'(x) = \frac{2\sqrt{x^2 + 1} - 2x \times \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + 1) - 2x^2}{\sqrt{x^2 + 1}(x^2 + 1)} = \frac{2}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

— **Signe** : toujours positive — g est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$ ✓

— **Contrôle numérique** : $g'(1) = \frac{2}{2^{3/2}} = \frac{2}{2,8284} \approx 0,70711$; et $g(1) = \frac{2}{\sqrt{2}} \approx 1,41421$, $g(1,001) \approx 1,41492$, soit un taux de $0,7066$ ✓

— **Limites** : $g(x) \rightarrow \pm 2$ en $\pm\infty$ ✓

c) **Quotient** : $u = x^3$, $v = (x - 1)^2$, donc $u' = 3x^2$ et $v' = 2(x - 1)$.

$$h'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - x^3 \times 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-1)[3(x-1) - 2x]}{(x-1)^4} = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

- **Signe** : $x^2 \geq 0$, donc le signe dépend de $\frac{x-3}{(x-1)^3}$ — positif sur $] -\infty ; 1[$, négatif sur $]1 ; 3[$, positif sur $]3 ; +\infty[$.
- **Minimum local** : $h(3) = \frac{27}{4} = 6,75$ ✓
- **Contrôle numérique** : $h'(2) = \frac{4 \times (-1)}{1} = -4$; et $h(2) = 8$, $h(2,001) \approx 7,99601$, soit un taux de $-3,994$ ✓
- **Contrôles de valeurs** : $h(2,5) = \frac{15,625}{2,25} \approx 6,944$ et $h(4) = \frac{64}{9} \approx 7,111$ — tous deux supérieurs à $6,75$ ✓
- **Point particulier** : $h'(0) = 0$ mais h'' ne change pas le signe de h' autour de 0 — ce n'est **pas** un extremum ✓

Réponse. a) $\frac{5x^2 - 4}{2\sqrt{x}}$ · b) $\frac{2}{(x^2 + 1)^{3/2}}$ · c) $\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$.