Plaquette 1 – Calculs de dérivées et variations

Dérivation et étude des fonctions — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours à utiliser.

— Dérivées usuelles : $(x^n)' = nx^{n-1}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(k)' = 0$.

— Opérations :

$$(u+v)' = u' + v' \qquad (ku)' = k\,u' \qquad (uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

— **Équation de la tangente** à la courbe de f au point d'abscisse a :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

— Lien variations / signe de la dérivée : si $f' > 0$ sur un intervalle, f est **croissante** ; si $f' < 0$, f est **décroissante** ; si f' s'annule en changeant de signe en a, f admet un **extremum local** en a.

— Signe d'un trinôme $ax^2 + bx + c$: du signe de a à l'extérieur des racines, du signe contraire entre les racines.

— Optimisation : on modélise la grandeur à optimiser par une fonction, on dérive, on étudie le signe de la dérivée, on conclut par la valeur de l'extremum **et** la valeur de x qui le réalise.

Correction de l'exercice 1 – Dérivée d'un polynôme

On dérive terme à terme, avec $(x^n)' = nx^{n-1}$ et $(ku)' = k\,u'$.

— $(x^3)' = 3x^2$;

— $(-4x^2)' = -4 \times 2x = -8x$;

— $(5x)' = 5$;

— $(-2)' = 0$ (la dérivée d'une constante est nulle).

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$$

Contrôle en $x = 1$: $f'(1) = 3 - 8 + 5 = 0$. Le taux de variation entre 1 et 1,001 vaut environ $\frac{f(1{,}001) - f(1)}{0{,}001} \approx -0{,}001$, très proche de 0 : la tangente au point d'abscisse 1 est horizontale.

Réponse. $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$.

Correction de l'exercice 2 – Racine carrée et inverse

On applique les dérivées usuelles et la linéarité.

— $(2\sqrt{x})' = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

— $\left(\frac{3}{x}\right)' = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2}$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Le domaine de dérivabilité est bien $]0\,;+\infty[$: ni $\sqrt{x}$ en 0, ni $\frac{1}{x}$ n'y sont dérivables.

Réponse. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}$.

Correction de l'exercice 3 – Dérivée d'un produit

Formule du cours : $(uv)' = u'v + uv'$.

— On pose $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = x^2 - 3$, donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x$.

— On applique :

$$f'(x) = 2(x^2 - 3) + (2x + 1) \times 2x$$

— On développe : $2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x$.

— On réduit : $f'(x) = 6x^2 + 2x - 6$.

— Contrôle : on peut développer f d'abord, $f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$, puis dériver : $6x^2 + 2x - 6$. Même résultat.

Réponse. $f'(x) = 6x^2 + 2x - 6$.

Correction de l'exercice 4 – Dérivée d'un quotient

Formule du cours : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

— $u(x) = 3x - 1$ et $v(x) = x + 2$, donc $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 1$.

$$f'(x) = \frac{3(x+2) - (3x-1) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{3x + 6 - 3x + 1}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$$

— Un carré est strictement positif (sauf en -2, valeur exclue) : $f'(x) > 0$.

— Donc f est **strictement croissante** sur $]-\infty\,;-2[$ et sur $]-2\,;+\infty[$.

Piège. On ne dit pas « croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ » : il faut séparer les deux intervalles, car la courbe « saute » en -2.

Réponse. $f'(x) = \frac{7}{(x+2)^2} > 0$: f est croissante sur chacun des deux intervalles.

Correction de l'exercice 5 – Équation de tangente

Formule du cours : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

— Valeur de la fonction : $f(2) = 4 - 6 + 1 = -1$.

— Dérivée : $f'(x) = 2x - 3$, donc $f'(2) = 1$.

— On remplace :

$$y = 1 \times (x - 2) + (-1) = x - 3$$

— La tangente a pour équation $y = x - 3$.

— Contrôle : pour $x = 2$, la tangente donne $y = -1 = f(2)$: elle passe bien par le point de contact.

Réponse. $y = x - 3$.

Correction de l'exercice 6 – Tableau de variations

— Dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$.

— Signe : le trinôme $3x^2 - 3$ a pour racines -1 et 1, et son coefficient dominant est positif : f' est positive à l'extérieur de $[-1\,;1]$, négative entre -1 et 1.

— D'où les variations :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Intervalle	$]-\infty\,;-1]$	$[-1\,;1]$	$[1\,;+\infty[$
Signe de $f'(x)$	$+$	$-$	$+$
Variations de f	croissante	décroissante	croissante

— Valeurs des extremums : $f(-1) = -1 + 3 = 2$ et $f(1) = 1 - 3 = -2$.
— Conclusion : f admet un **maximum local** égal à 2 en $x = -1$ et un **minimum local** égal à -2 en $x = 1$. Ce ne sont pas des extremums globaux : par exemple $f(3) = 27 - 9 = 18 > 2$ et $f(-3) = -18 < -2$.

Réponse. Maximum local 2 en $x = -1$; minimum local -2 en $x = 1$.

Correction de l’exercice 7 – Extremum d’un trinôme par la dérivée

— Dérivée : $f'(x) = 4x - 12$.
— $f'(x) = 0$ donne $x = 3$; $f'(x) < 0$ pour $x < 3$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 3$.
— f est donc décroissante puis croissante : elle admet un **minimum** en $x = 3$.
— Valeur : $f(3) = 2 \times 9 - 36 + 5 = 18 - 36 + 5 = -13$.
— Contrôle par la forme canonique : $f(x) = 2(x-3)^2 - 13$, ce qui confirme le minimum -13 atteint en 3.

Réponse. Minimum global -13 atteint en $x = 3$.

Correction de l’exercice 8 – Une fonction avec un inverse

— Dérivée : $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$.
— On met au même dénominateur pour étudier le signe :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

— Sur $]0\,;+\infty[$: $x^2 > 0$ et $x + 1 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x - 1$.
— Ainsi $f' < 0$ sur $]0\,;1[$ et $f' > 0$ sur $]1\,;+\infty[$: f décroît puis croît.
— Minimum en $x = 1$: $f(1) = 1 + 1 = 2$.
— Interprétation : pour tout $x > 0$, $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$, avec égalité seulement si $x = 1$.

Réponse. f décroît sur $]0\,;1]$, croît sur $[1\,;+\infty[$; minimum 2 en $x = 1$.

Correction de l’exercice 9 – Optimisation : un enclos contre un mur

a) Le grillage couvre les deux côtés de longueur x et le côté parallèle au mur.

— Longueur du côté parallèle au mur : $100 - 2x$.
— Aire : $A(x) = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$.
— Les longueurs doivent être positives : $x > 0$ et $100 - 2x > 0$, donc $x \in]0\,;50[$.

b) On dérive :

— $A'(x) = 100 - 4x$.
— $A'(x) = 0$ donne $x = 25$; $A' > 0$ avant 25, $A' < 0$ après : c’est un **maximum**.
— Dimensions : $x = 25$ m et $100 - 2 \times 25 = 50$ m.
— Aire maximale : $A(25) = 25 \times 50 = 1\,250$ m².
— Contrôle : pour $x = 20$, $A = 20 \times 60 = 1\,200 < 1\,250$; pour $x = 30$, $A = 30 \times 40 = 1\,200$. Le maximum est bien en 25.

Réponse. Enclos de 25 m sur 50 m, d’aire maximale 1 250 m².

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Optimisation : bénéfice d'une entreprise

a) On dérive : $B'(x) = -x + 40$.

— $B'(x) = 0$ donne $x = 40$; $B' > 0$ avant, $B' < 0$ après : maximum en $x = 40$.

— $B(40) = -0{,}5 \times 1\,600 + 1\,600 - 300 = -800 + 1\,600 - 300 = 500$.

— Le bénéfice maximal vaut 500 centaines d'euros, soit 50 000 €, pour 40 tonnes produites.

b) On résout $-0{,}5x^2 + 40x - 300 = 0$, ou en multipliant par -2 : $x^2 - 80x + 600 = 0$.

— Discriminant : $\Delta = 80^2 - 4 \times 600 = 6\,400 - 2\,400 = 4\,000 > 0$.

— $\sqrt{4\,000} = 20\sqrt{10} \approx 63{,}25$.

— Racines : $x_1 = \dfrac{80 - 63{,}25}{2} \approx 8{,}4$ et $x_2 = \dfrac{80 + 63{,}25}{2} \approx 71{,}6$.

— B est positif **entre** les racines (coefficient de x^2 négatif) : sur $[0\,;60]$, l'entreprise est bénéficiaire dès que $x > 8{,}4$, c'est-à-dire à partir d'environ 8,4 tonnes.

Réponse. a) 40 tonnes, bénéfice maximal 50 000 € · b) à partir d'environ 8,4 tonnes.

Correction de l'exercice 11 – Du taux de variation au nombre dérivé

a) Le taux de variation entre 3 et $3 + h$ vaut

$$\frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = 6 + h$$

après simplification par $h \neq 0$.

b) Pour $h = 0{,}1$, le taux vaut 6,1 ; pour $h = -0{,}01$, il vaut 5,99. Quand h se rapproche de 0, par valeurs positives ou négatives, le taux se rapproche de 6.

c) Le nombre dérivé est la limite de ce taux : $f'(3) = 6$, ce que confirme la formule $f'(x) = 2x$. Avec $f(3) = 9$, la tangente a pour équation $y = 6(x - 3) + 9 = 6x - 9$. **Contrôle** : la tangente passe par $(3\,;9)$ puisque $18 - 9 = 9$.

Réponse. a) $6 + h$; b) 6,1 et 5,99, qui se rapprochent de 6 ; c) $f'(3) = 6$, tangente $y = 6x - 9$.

Correction de l'exercice 12 – Puissances, inverse et racine

On dérive terme à terme. Pour x^5, la formule $(x^n)' = nx^{n-1}$ donne $5x^4$. Pour $-\dfrac{2}{x^2} = -2x^{-2}$, la même formule, valable pour les exposants entiers négatifs, donne $-2 \times (-2)x^{-3} = \dfrac{4}{x^3}$. Pour $3\sqrt{x}$, on obtient $3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$. Ainsi

$$f'(x) = 5x^4 + \frac{4}{x^3} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

En 1 : $f'(1) = 5 + 4 + 1{,}5 = 10{,}5$. Les trois termes sont positifs pour $x > 0$: f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$. On travaille sur $]0\,;+\infty[$ parce que $\dfrac{1}{x^2}$ n'est pas définie en 0 et que $\sqrt{x}$ n'y est pas dérivable.

Réponse. $f'(x) = 5x^4 + \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$; $f'(1) = 10{,}5$.

Correction de l'exercice 13 – La hauteur d'une balle

a) La vitesse instantanée est la dérivée de la hauteur :

$$h'(t) = -10t + 20$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

On obtient $h'(1) = 10$ m/s et $h'(3) = -10$ m/s. À $t = 1$, la vitesse est positive : la balle monte, à 10 m/s. À $t = 3$, elle est négative : la balle redescend, à la même vitesse.

b) $h'(t) = 0$ pour $t = 2$; h' est positive avant et négative après, donc h croît sur $[0\,;2]$ puis décroît sur $[2\,;4]$. La hauteur est maximale à $t = 2$ s et vaut $h(2) = -20 + 40 + 1 = 21$ m. Au sommet de sa trajectoire, la vitesse de la balle est nulle : la tangente à la courbe de h y est horizontale.

Réponse. a) $h'(t) = -10t + 20$; 10 m/s (montée) et -10 m/s (descente) ; b) 21 m à $t = 2$ s.

Correction de l'exercice 14 – Variations sur un intervalle fermé

On calcule $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3\left(x^2 - 2x - 3\right) = -3(x+1)(x-3)$. Le trinôme a pour racines -1 et 3 et un coefficient dominant négatif : f' est négative sur $[-2\,;-1[$, positive sur $]-1\,;3[$ et négative sur $]3\,;5]$.

On calcule les valeurs utiles :

$$f(-2) = 8 + 12 - 18 - 2 = 0 \qquad f(-1) = 1 + 3 - 9 - 2 = -7$$

$$f(3) = -27 + 27 + 27 - 2 = 25 \qquad f(5) = -125 + 75 + 45 - 2 = -7$$

f décroît de 0 à -7 sur $[-2\,;-1]$, croît de -7 à 25 sur $[-1\,;3]$, puis décroît de 25 à -7 sur $[3\,;5]$. Le maximum vaut 25, atteint en 3 ; le minimum vaut -7, atteint deux fois, en -1 et en 5. Sur un intervalle fermé, il faut toujours comparer les extremums locaux avec les valeurs aux bornes.

Réponse. Maximum 25 en $x = 3$; minimum -7, atteint en $x = -1$ et en $x = 5$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : tangentes horizontales

— Dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.

a) Une tangente est horizontale lorsque son coefficient directeur est nul, c'est-à-dire $f'(x) = 0$.

— $3x(x-2) = 0$ donne $x = 0$ ou $x = 2$.

— Points concernés : $(0\,;0)$ car $f(0) = 0$, et $(2\,;-4)$ car $f(2) = 8 - 12 = -4$.

b) $f(1) = 1 - 3 = -2$ et $f'(1) = 3 - 6 = -3$, donc

$$y = -3(x-1) - 2 = -3x + 1$$

c) On résout $f'(x) = 9$, soit $3x^2 - 6x - 9 = 0$, ou encore $x^2 - 2x - 3 = 0$.

— Discriminant : $\Delta = 4 + 12 = 16$, $\sqrt{\Delta} = 4$.

— Racines : $x = \dfrac{2-4}{2} = -1$ et $x = \dfrac{2+4}{2} = 3$.

— Oui : en $x = -1$ et en $x = 3$, la tangente a pour coefficient directeur 9.

Réponse. a) $x = 0$ et $x = 2$ · b) $y = -3x + 1$ · c) oui, en $x = -1$ et $x = 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).