

Plaquette 1 - Calculs de dérivées et variations

Dérivation et étude des fonctions — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours à utiliser.

— Dérivées usuelles : $(x^n)' = nx^{n-1}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(k)' = 0$.

— Opérations :

$$(u + v)' = u' + v' \quad (ku)' = k u' \quad (uv)' = u'v + uv' \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

— **Équation de la tangente** à la courbe de f au point d'abscisse a :

$$y = f(a)(x - a) + f(a)$$

— Lien variations / signe de la dérivée : si $f' > 0$ sur un intervalle, f est **croissante** ; si $f' < 0$, f est **décroissante** ; si f' s'annule en changeant de signe en a , f admet un **extremum local** en a .

— Signe d'un trinôme $ax^2 + bx + c$: du signe de a à l'extérieur des racines, du signe contraire entre les racines.

— Optimisation : on modélise la grandeur à optimiser par une fonction, on dérive, on étudie le signe de la dérivée, on conclut par la valeur de l'extremum **et** la valeur de x qui le réalise.

Correction de l'exercice 1 - Dérivée d'un polynôme

On dérive terme à terme, avec $(x^n)' = nx^{n-1}$ et $(ku)' = k u'$.

— $(x^3)' = 3x^2$;

— $(-4x^2)' = -4 \times 2x = -8x$;

— $(5x)' = 5$;

— $(-2)' = 0$ (la dérivée d'une constante est nulle).

$$f(x) = 3x^2 - 8x + 5$$

Réponse. $f(x) = 3x^2 - 8x + 5$.

Correction de l'exercice 2 - Racine carrée et inverse

On applique les dérivées usuelles et la linéarité.

— $(2\sqrt{x})' = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

— $\left(\frac{3}{x}\right)' = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{3}{x^2}$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}$$

— Le domaine de dérivabilité est bien $]0; +\infty[$: ni $\sqrt{x}$ en 0, ni $\frac{1}{x}$ n'y sont dérivables.

Réponse. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}$.

Correction de l'exercice 3 - Dérivée d'un produit

Formule du cours : $(uv)' = u'v + uv'$.

- On pose $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = x^2 - 3$, donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x$.
- On applique :

$$f(x) = 2(x^2 - 3) + (2x + 1) \times 2x$$

- On développe : $2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x$.
- On réduit : $f(x) = 6x^2 + 2x - 6$.
- Contrôle : on peut développer f d'abord, $f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$, puis dériver : $6x^2 + 2x - 6$. Même résultat.

Réponse. $f(x) = 6x^2 + 2x - 6$.

Correction de l'exercice 4 - Dérivée d'un quotient

Formule du cours : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

- $u(x) = 3x - 1$ et $v(x) = x + 2$, donc $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 1$.

$$f(x) = \frac{3(x+2) - (3x-1) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{3x+6-3x+1}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}$$

- Un carré est strictement positif (sauf en -2 , valeur exclue) : $f(x) > 0$.
- Donc f est **strictement croissante** sur $] -\infty ; -2[$ et sur $] -2 ; +\infty[$.

Piège. On ne dit pas « croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ » : il faut séparer les deux intervalles, car la courbe « saute » en -2 .

Réponse. $f(x) = \frac{7}{(x+2)^2} > 0$: f est croissante sur chacun des deux intervalles.

Correction de l'exercice 5 - Équation de tangente

Formule du cours : $y = f(a)(x - a) + f(a)$.

- Valeur de la fonction : $f(2) = 4 - 6 + 1 = -1$.
- Dérivée : $f'(x) = 2x - 3$, donc $f'(2) = 1$.
- On remplace :

$$y = 1 \times (x - 2) + (-1) = x - 3$$

- La tangente a pour équation $y = x - 3$.
- Contrôle : pour $x = 2$, la tangente donne $y = -1 = f(2)$: elle passe bien par le point de contact.

Réponse. $y = x - 3$.

Correction de l'exercice 6 - Tableau de variations

- Dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$.
- Signe : le trinôme $3x^2 - 3$ a pour racines -1 et 1 , et son coefficient dominant est positif : f' est positive à l'extérieur de $[-1 ; 1]$, négative entre -1 et 1 .
- D'où les variations :

Intervalle	$] - \infty ; -1]$	$[-1 ; 1]$	$[1 ; +\infty[$
Signe de $f'(x)$	+	-	+
Variations de f	croissante	décroissante	croissante

- Valeurs des extremums : $f(-1) = -1 + 3 = 2$ et $f(1) = 1 - 3 = -2$.
- Conclusion : f admet un **maximum local** égal à 2 en $x = -1$ et un **minimum local** égal à -2 en $x = 1$. Ce ne sont pas des extremums globaux, car $f(x)$ tend vers $\pm\infty$ aux bornes.

Réponse. Maximum local 2 en $x = -1$; minimum local -2 en $x = 1$.

Correction de l'exercice 7 - Extremum d'un trinôme par la dérivée

- Dérivée : $f'(x) = 4x - 12$.
- $f'(x) = 0$ donne $x = 3$; $f'(x) < 0$ pour $x < 3$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 3$.
- f est donc décroissante puis croissante : elle admet un **minimum** en $x = 3$.
- Valeur : $f(3) = 2 \times 9 - 36 + 5 = 18 - 36 + 5 = -13$.
- Contrôle par la forme canonique : $f(x) = 2(x - 3)^2 - 13$, ce qui confirme le minimum -13 atteint en 3.

Réponse. Minimum global -13 atteint en $x = 3$.

Correction de l'exercice 8 - Une fonction avec un inverse

- Dérivée : $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.
- On met au même dénominateur pour étudier le signe :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x^2}$$
- Sur $]0 ; +\infty[$: $x^2 > 0$ et $x + 1 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x - 1$.
- Ainsi $f' < 0$ sur $]0 ; 1[$ et $f' > 0$ sur $]1 ; +\infty[$: f décroît puis croît.
- Minimum en $x = 1$: $f(1) = 1 + 1 = 2$.
- Interprétation : pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$, avec égalité seulement si $x = 1$.

Réponse. f décroît sur $]0 ; 1]$, croît sur $]1 ; +\infty[$; minimum 2 en $x = 1$.

Correction de l'exercice 9 - Optimisation : un enclos contre un mur

- a) Le grillage couvre les deux côtés de longueur x et le côté parallèle au mur.
- Longueur du côté parallèle au mur : $100 - 2x$.
 - Aire : $A(x) = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$.
 - Les longueurs doivent être positives : $x > 0$ et $100 - 2x > 0$, donc $x \in]0 ; 50[$.
- b) On dérive :
- $A'(x) = 100 - 4x$.
 - $A'(x) = 0$ donne $x = 25$; $A' > 0$ avant 25, $A' < 0$ après : c'est un **maximum**.
 - Dimensions : $x = 25$ m et $100 - 2 \times 25 = 50$ m.
 - Aire maximale : $A(25) = 25 \times 50 = 1\,250$ m².
 - Contrôle : pour $x = 20$, $A = 20 \times 60 = 1\,200 < 1\,250$; pour $x = 30$, $A = 30 \times 40 = 1\,200$. Le maximum est bien en 25.

Réponse. Enclos de 25 m sur 50 m, d'aire maximale 1 250 m².

Correction de l'exercice 10 - Optimisation : bénéfice d'une entreprise

a) On dérive : $B'(x) = -x + 40$.

— $B'(x) = 0$ donne $x = 40$; $B' > 0$ avant, $B' < 0$ après : maximum en $x = 40$.

— $B(40) = -0,5 \times 1\,600 + 1\,600 - 300 = -800 + 1\,600 - 300 = 500$.

— Le bénéfice maximal vaut 500 centaines d'euros, soit 50 000 €, pour 40 tonnes produites.

b) On résout $-0,5x^2 + 40x - 300 = 0$, ou en multipliant par -2 : $x^2 - 80x + 600 = 0$.

— Discriminant : $\Delta = 80^2 - 4 \times 600 = 6\,400 - 2\,400 = 4\,000 > 0$.

— $\sqrt{4\,000} = 20\sqrt{10} \approx 63,25$.

— Racines : $x_1 = \frac{80 - 63,25}{2} \approx 8,4$ et $x_2 = \frac{80 + 63,25}{2} \approx 71,6$.

— B est positif **entre** les racines (coefficient de x^2 négatif) : sur $[0 ; 60]$, l'entreprise est bénéficiaire dès que $x > 8,4$, c'est-à-dire à partir d'environ 8,4 tonnes.

Réponse. a) 40 tonnes, bénéfice maximal 50 000 € · b) à partir d'environ 8,4 tonnes.

Correction de l'exercice 11 - Synthèse : tangentes horizontales

— Dérivée : $f(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

a) Une tangente est horizontale lorsque son coefficient directeur est nul, c'est-à-dire $f'(x) = 0$.

— $3x(x - 2) = 0$ donne $x = 0$ ou $x = 2$.

— Points concernés : $(0 ; 0)$ car $f(0) = 0$, et $(2 ; -4)$ car $f(2) = 8 - 12 = -4$.

b) $f(1) = 1 - 3 = -2$ et $f'(1) = 3 - 6 = -3$, donc

$$y = -3(x - 1) - 2 = -3x + 1$$

c) On résout $f(x) = 9$, soit $3x^2 - 6x - 9 = 0$, ou encore $x^2 - 2x - 3 = 0$.

— Discriminant : $\Delta = 4 + 12 = 16$, $\sqrt{\Delta} = 4$.

— Racines : $x = \frac{2 - 4}{2} = -1$ et $x = \frac{2 + 4}{2} = 3$.

— Oui : en $x = -1$ et en $x = 3$, la tangente a pour coefficient directeur 9.

Réponse. a) $x = 0$ et $x = 2$ · b) $y = -3x + 1$ · c) oui, en $x = -1$ et $x = 3$.