Plaquette 4 – Études de fonctions rationnelles et irrationnelles

Dérivation et étude des fonctions — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Plan d'étude.

1. Ensemble de définition : $v(x) \neq 0$ pour un quotient $\frac{u}{v}$, $x \geq 0$ pour $\sqrt{x}$ (dérivable seulement pour $x > 0$). 2. Dérivée, mise sous la forme d'un seul quotient ; le dénominateur v^2 est positif, seul le numérateur décide du signe. 3. Tableau de signes, puis variations **sur chaque intervalle** de l'ensemble de définition. 4. Extremums : valeurs exactes, puis approchées.

Lien signe-variations. Sur un intervalle, $f' \geq 0$ donne f croissante, $f' \leq 0$ donne f décroissante ; si f' s'annule en changeant de signe en a, f admet un extremum local en a.

Démontrer une inégalité $f(x) \geq g(x)$: on étudie $h = f - g$ et l'on montre que son minimum est positif ou nul.

Parité. f est paire si $f(-x) = f(x)$, impaire si $f(-x) = -f(x)$, l'ensemble de définition étant symétrique par rapport à 0.

Dérivabilité en a. On étudie le taux de variation quand h se rapproche de 0 :

$$\frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \qquad \frac{|h| - |0|}{h} = \pm 1$$

Le premier devient aussi grand qu'on veut, le second vaut 1 ou -1 selon le signe de h : ni $\sqrt{x}$ ni $|x|$ ne sont dérivables en 0.

Correction de l'exercice 1 – Domaine et variations d'un quotient

Le dénominateur s'annule pour $x^2 = 4$, soit $x = \pm 2$: f est définie sur $]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;2[\cup]2\,;+\infty[$.

Avec $u = x + 3$ et $v = x^2 - 4$, le numérateur de la dérivée vaut $\left(x^2-4\right) - (x+3) \times 2x = -x^2 - 6x - 4$. Le trinôme $x^2 + 6x + 4$ a pour discriminant 20 et pour racines $x_1 = -3 - \sqrt{5} \approx -5{,}236$ et $x_2 = -3 + \sqrt{5} \approx -0{,}764$. Le numérateur $-\left(x^2 + 6x + 4\right)$ est donc positif entre x_1 et x_2, négatif à l'extérieur.

Intervalle	$]-\infty\,;x_1]$	$[x_1\,;-2[$	$]-2\,;x_2]$	$[x_2\,;2[$	$]2\,;+\infty[$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$
f	décroît	croît	croît	décroît	décroît

f admet un minimum local en x_1, $f(x_1) = -\dfrac{3-\sqrt{5}}{8} \approx -0{,}095$, et un maximum local en x_2, $f(x_2) = -\dfrac{3+\sqrt{5}}{8} \approx -0{,}655$. Le maximum local est plus petit que le minimum local : ils ne sont pas sur le même intervalle.

Réponse. Définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;2\}$; minimum local $\approx -0{,}095$ en $-3-\sqrt{5}$, maximum local $\approx -0{,}655$ en $-3+\sqrt{5}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 2 – Une fonction homographique

a) Avec $u = 2x + 1$ et $v = x - 1$:

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} < 0$$

f est strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$.

b) On réduit au même dénominateur : $2 + \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{2(x-1)+3}{x-1} = \dfrac{2x+1}{x-1}$. Pour $x > 1$, $\dfrac{3}{x-1} > 0$, donc $f(x) > 2$: la courbe reste au-dessus de la droite $y = 2$.

c) $f(x) = 5$ équivaut à $\dfrac{3}{x-1} = 3$, soit $x - 1 = 1$, donc $x = 2$. **Contrôle** : $f(2) = \dfrac{5}{1} = 5$. Comme f est strictement décroissante, c’est la seule solution.

Réponse. a) $f'(x) = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$, f décroissante ; b) $\dfrac{3}{x-1} > 0$; c) $x = 2$.

Correction de l’exercice 3 – Une somme et son minimum

a) On écrit $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$, d’où $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2-4}{x^2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$. Pour $x > 0$, $x + 2 > 0$ et $x^2 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x - 2$. La fonction décroît sur $]0\,;2]$ et croît sur $[2\,;+\infty[$; son minimum vaut $f(2) = 2 + 2 = 4$.

b) Le minimum de f sur $]0\,;+\infty[$ est 4, donc $f(x) \geq 4$ pour tout $x > 0$, ce qui s’écrit $x + \dfrac{4}{x} \geq 4$. On peut aussi le vérifier directement :

$$x + \frac{4}{x} - 4 = \frac{x^2 - 4x + 4}{x} = \frac{(x-2)^2}{x} \geq 0$$

c) $f(x) = 5$ équivaut, pour $x > 0$, à $x^2 + 4 = 5x$, soit $x^2 - 5x + 4 = 0$, de racines 1 et 4. Les deux solutions sont de part et d’autre du minimum, en accord avec le tableau de variations.

Réponse. a) Minimum 4 en $x = 2$; b) $x + \dfrac{4}{x} - 4 = \dfrac{(x-2)^2}{x}$; c) $x = 1$ ou $x = 4$.

Correction de l’exercice 4 – Racine carrée et maximum

On développe : $f(x) = 3\sqrt{x} - x\sqrt{x}$. La dérivée de $x\sqrt{x}$ s’obtient par la formule du produit : $1 \times \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$. Donc, pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2} = \frac{3 - 3x}{2\sqrt{x}} = \frac{3(1-x)}{2\sqrt{x}}$$

en réduisant au dénominateur $2\sqrt{x}$ (on a $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$).

Le dénominateur est positif : f' a le signe de $1 - x$. La fonction croît sur $[0\,;1]$ et décroît sur $[1\,;3]$. Son maximum vaut $f(1) = 1 \times 2 = 2$, et elle s’annule aux bornes : $f(0) = f(3) = 0$. **Contrôle** : $f(0{,}5) \approx 1{,}77$ et $f(2) \approx 1{,}41$ sont bien inférieurs à 2.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{3(1-x)}{2\sqrt{x}}$; maximum 2 en $x = 1$.

Correction de l’exercice 5 – Quotient de degrés deux sur un

Avec $u = x^2 + x + 1$ et $v = x + 1$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(x+1) - \left(x^2+x+1\right)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

Sur $]-1\,;+\infty[$, $x+2>0$ et le dénominateur est positif : $f'(x)$ a le signe de x. La fonction décroît sur $]-1\,;0]$ et croît sur $[0\,;+\infty[$; son minimum vaut $f(0)=1$. Donc $f(x)\geq 1$ pour tout $x>-1$.

Vérification directe : $f(x)-1=\dfrac{x^2+x+1-x-1}{x+1}=\dfrac{x^2}{x+1}\geq 0$ sur $]-1\,;+\infty[$. Par exemple, $f(1)=1{,}5$ et $f(-0{,}5)=1{,}5$.

Réponse. $f'(x)=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$; minimum 1 en 0 ; $f(x)-1=\dfrac{x^2}{x+1}\geq 0$.

Correction de l’exercice 6 – Extremums sur un intervalle fermé

On a $f'(x)=1-\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x^2-4}{x^2}$, qui a le signe de $x-2$ sur $[1\,;8]$. La fonction décroît sur $[1\,;2]$ et croît sur $[2\,;8]$.

Le minimum est atteint en 2 : $f(2)=4$. Le maximum est atteint à l’une des bornes, puisque f décroît puis croît. On compare

$$f(1)=1+4=5 \qquad f(8)=8+0{,}5=8{,}5$$

Le maximum vaut donc 8,5, atteint en $x=8$. Sur un intervalle fermé, il ne faut pas oublier de comparer les valeurs aux bornes : le maximum n’est pas ici un point où la dérivée s’annule.

Réponse. Minimum 4 en $x=2$, maximum 8,5 en $x=8$.

Correction de l’exercice 7 – Une famille de fonctions

a) Avec $u=x$ et $v=x^2+m$: le numérateur vaut $\left(x^2+m\right)-x\times 2x=m-x^2$, d’où le résultat.

b) Sur $[0\,;+\infty[$, $m-x^2=(\sqrt{m}-x)(\sqrt{m}+x)$ a le signe de $\sqrt{m}-x$. La fonction croît sur $[0\,;\sqrt{m}\,]$ et décroît ensuite ; son maximum vaut

$$f_m(\sqrt{m})=\frac{\sqrt{m}}{m+m}=\frac{\sqrt{m}}{2m}=\frac{1}{2\sqrt{m}}$$

c) On résout $\dfrac{1}{2\sqrt{m}}=\dfrac{1}{4}$, soit $2\sqrt{m}=4$, donc $\sqrt{m}=2$ et $m=4$. **Contrôle** : $f_4(2)=\dfrac{2}{4+4}=\dfrac{1}{4}$. Plus m est grand, plus le maximum est atteint loin de 0 et plus il est petit.

Réponse. b) Maximum $\dfrac{1}{2\sqrt{m}}$ en $x=\sqrt{m}$; c) $m=4$.

Correction de l’exercice 8 – Comparer deux fonctions

On étudie le signe de la différence, en réduisant au même dénominateur $x\left(x^2+1\right)$:

$$f(x)-g(x)=\frac{x^2+1-x^2}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}$$

Comme $x^2+1>0$, la différence a le signe de x. Sur $]0\,;+\infty[$, la courbe de f est au-dessus de celle de g ; sur $]-\infty\,;0[$, elle est en dessous.

La différence ne s’annule jamais, puisque son numérateur vaut 1 : les deux courbes n’ont aucun point commun. **Contrôle** : $f(1)=1>g(1)=0{,}5$ et $f(-1)=-1<g(-1)=-0{,}5$. Les deux fonctions sont impaires, ce qui explique que la situation pour $x<0$ soit la symétrique de celle pour $x>0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $f(x) - g(x) = \dfrac{1}{x\left(x^2+1\right)}$, du signe de x ; aucun point commun.

Correction de l'exercice 9 – Parité et variations

a) Pour tout réel x, $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = -\dfrac{x^3}{x^2+1} = -f(x)$: f est impaire, et sa courbe est symétrique par rapport à l'origine.

b) Avec $u = x^3$ et $v = x^2+1$:

$$f'(x) = \frac{3x^2\left(x^2+1\right) - x^3 \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Elle est positive ou nulle, et ne s'annule qu'en 0 : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$: la tangente en 0 est l'axe des abscisses, $y = 0$. La courbe a le signe de x^3 : elle est en dessous de la tangente pour $x < 0$ et au-dessus pour $x > 0$. Elle traverse donc sa tangente en 0, bien que $f'(0) = 0$: un nombre dérivé nul ne donne pas toujours un extremum.

Réponse. a) $f(-x) = -f(x)$; b) $f' \geq 0$: f croissante ; c) tangente $y = 0$, traversée par la courbe.

Correction de l'exercice 10 – La valeur absolue en 0

a) Le taux de variation vaut

$$\frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

Pour $h > 0$, $|h| = h$ et le taux vaut 1 ; pour $h < 0$, $|h| = -h$ et le taux vaut -1. Quand h se rapproche de 0, le taux ne se rapproche pas d'un nombre unique : il vaut 1 d'un côté et -1 de l'autre. La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 ; sa courbe y présente un point anguleux, avec deux demi-tangentes de pentes 1 et -1.

b) Pour g, le taux vaut $\dfrac{h|h| - 0}{h} = |h|$, qui se rapproche de 0 quand h se rapproche de 0. La fonction g est dérivable en 0, avec $g'(0) = 0$: la courbe de g (égale à x^2 pour $x \geq 0$ et à $-x^2$ pour $x < 0$) admet en 0 une tangente horizontale.

Réponse. a) Le taux vaut 1 si $h > 0$, -1 si $h < 0$: $|x|$ n'est pas dérivable en 0 ; b) le taux vaut $|h|$: g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

Correction de l'exercice 11 – La racine carrée n'est pas dérivable en 0

a) Pour $h > 0$:

$$\frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$$

On obtient 10 pour $h = 0{,}01$, 100 pour $h = 0{,}0001$ et 1 000 pour $h = 10^{-6}$. Quand h se rapproche de 0, le taux devient aussi grand qu'on veut et ne se rapproche d'aucun nombre : la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

b) Les sécantes entre l'origine et le point d'abscisse h ont des pentes de plus en plus grandes : elles se rapprochent de l'axe des ordonnées. La courbe admet en 0 une tangente verticale, qui n'a pas de coefficient directeur.

c) Pour k, le taux vaut $\dfrac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h}$, qui se rapproche de 0. La fonction k est dérivable en 0,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

avec $k'(0) = 0$: multiplier par x a « lissé » la courbe à l'origine.

Réponse. a) Le taux vaut $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$: 10, 100, 1 000 ; non dérivable en 0 ; b) tangente verticale ; c) oui, $k'(0) = 0$.

Correction de l'exercice 12 – Démontrer une inégalité

Pour $x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}$. Le dénominateur est positif ; le numérateur est négatif pour $0 < x < 1$ et positif pour $x > 1$. La fonction g décroît sur $[0\,;1]$ et croît sur $[1\,;+\infty[$: son minimum vaut

$$g(1) = \frac{2}{2} - 1 = 0$$

Donc $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, c'est-à-dire $\sqrt{x} \leq \dfrac{x+1}{2}$, avec égalité seulement pour $x = 1$.

Interprétation. La tangente à la courbe de la racine carrée en 1 a pour équation $y = \dfrac{1}{2}(x-1) + 1 = \dfrac{x+1}{2}$. L'inégalité signifie que la courbe est en dessous de cette tangente : l'approximation $\sqrt{1+h} \approx 1 + \dfrac{h}{2}$ donne toujours une valeur trop grande.
Contrôle : $\sqrt{4} = 2 \leq 2{,}5$.

Réponse. Minimum de g égal à 0 en 1 : $\sqrt{x} \leq \dfrac{x+1}{2}$, égalité pour $x = 1$; la courbe est sous sa tangente en 1.

Correction de l'exercice 13 – Une étude sur un intervalle fermé

a) La dérivée de $(x-1)^2$ vaut $2(x-1)$ (dérivée d'un carré). Avec $v = x + 1$:

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1) - (x-1)^2}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(2x+2-x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

b) Sur $[0\,;5]$, $x + 3 > 0$: $f'(x)$ a le signe de $x - 1$. La fonction décroît sur $[0\,;1]$ et croît sur $[1\,;5]$. Son minimum vaut $f(1) = 0$. Pour le maximum, on compare les bornes : $f(0) = 1$ et $f(5) = \dfrac{16}{6} = \dfrac{8}{3} \approx 2{,}67$. Le maximum vaut $\dfrac{8}{3}$, atteint en 5.

c) $f(x) = 1$ équivaut à $(x-1)^2 = x + 1$, soit $x^2 - 3x = 0$, c'est-à-dire $x(x-3) = 0$. Les solutions sont 0 et 3, toutes deux dans $[0\,;5]$. **Contrôle** : $f(3) = \dfrac{4}{4} = 1$.

Réponse. b) Minimum 0 en 1, maximum $\dfrac{8}{3}$ en 5 ; c) $x = 0$ ou $x = 3$.

Correction de l'exercice 14 – Lire et justifier un tableau de variations

a) On calcule $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3\left(x^2 - 2x - 3\right) = 3(x+1)(x-3)$. Elle est positive à l'extérieur de $[-1\,;3]$ et négative entre -1 et 3. On calcule les valeurs utiles :

$$f(-3) = -27 - 27 + 27 + 5 = -22 \qquad f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$$

$$f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22 \qquad f(5) = 125 - 75 - 45 + 5 = 10$$

f croît de -22 à 10 sur $[-3\,;-1]$, décroît de 10 à -22 sur $[-1\,;3]$, puis croît de -22 à 10 sur $[3\,;5]$.

b) Le minimum vaut -22, atteint en -3 et en 3 ; le maximum vaut 10, atteint en -1 et en 5.

c) Sur chacun des trois intervalles, les valeurs de f restent entre ses valeurs aux extrémités, qui sont -22 et 10. Donc $-22 \leq f(x) \leq 10$ pour tout x de $[-3\,;5]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. b) Minimum -22 (en -3 et 3), maximum 10 (en -1 et 5) ; c) découle du tableau.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : étude complète d'une fonction rationnelle

a) Avec $u = x^2 - 3x + 6$ et $v = x - 1$, le numérateur vaut $(2x - 3)(x - 1) - \left(x^2 - 3x + 6\right) = 2x^2 - 5x + 3 - x^2 + 3x - 6 = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$. Sur $]1\,;+\infty[$, $x + 1 > 0$: f' a le signe de $x - 3$. La fonction décroît sur $]1\,;3]$ et croît sur $[3\,;+\infty[$, avec $f(3) = \dfrac{6}{2} = 3$.

b) Le minimum de f sur $]1\,;+\infty[$ vaut 3, donc $f(x) \geq 3$.

c) $f(2) = \dfrac{4}{1} = 4$ et $f'(2) = \dfrac{3 \times (-1)}{1} = -3$: la tangente a pour équation $y = -3(x - 2) + 4 = -3x + 10$.

d) On réduit au même dénominateur, avec $(x - 2)(x - 1) = x^2 - 3x + 2$:

$$f(x) - (x - 2) = \frac{x^2 - 3x + 6 - \left(x^2 - 3x + 2\right)}{x - 1} = \frac{4}{x - 1}$$

Pour $x > 1$, cette différence est strictement positive : la courbe est toujours au-dessus de la droite D, sans jamais la rencontrer. Elle s'en rapproche quand x devient grand, puisque $\dfrac{4}{x - 1}$ devient petit.

e) $f(x) = 4$ équivaut à $x^2 - 3x + 6 = 4x - 4$, soit $x^2 - 7x + 10 = 0$, de solutions 2 et 5. **Contrôle** : $f(5) = \dfrac{16}{4} = 4$.

Réponse. a) Minimum 3 en $x = 3$; b) découle de a) ; c) $y = -3x + 10$; d) différence $\dfrac{4}{x - 1} > 0$: courbe au-dessus de D ; e) $x = 2$ ou $x = 5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).