

## Plaquette 4 - Études de fonctions rationnelles et irrationnelles

### Dérivation et étude des fonctions — Première spé maths

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

##### Domaine de définition.

- Quotient : le dénominateur ne doit **pas** s'annuler.
- Racine : l'expression sous le radical doit être **positive ou nulle**.
- Dérivabilité : pour  $\sqrt{u}$ , il faut de plus  $u > 0$  **strictement**.

##### Dérivées.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

**Simplification d'une dérivée de quotient.** On développe **seulement** le numérateur et on le factorise ; le dénominateur  $v^2$  reste tel quel, puisqu'il est **positif** et ne joue aucun rôle dans le signe.

##### Limites aux bornes.

- **En une valeur interdite  $a$**  : si le numérateur ne s'annule pas,  $|f| \rightarrow +\infty$  — **asymptote verticale**  $x = a$ . Le signe se lit sur celui du numérateur et du dénominateur au voisinage.
- **En  $\pm\infty$  pour un quotient de polynômes** : on compare les degrés.

| Degrés                        | Limite                                      |
|-------------------------------|---------------------------------------------|
| numérateur < dénominateur     | 0 (asymptote horizontale $y = 0$ )          |
| numérateur = dénominateur     | quotient des coefficients dominants         |
| numérateur = dénominateur + 1 | $\pm\infty$ , avec <b>asymptote oblique</b> |

**Asymptote oblique.** Pour  $\frac{ax^2 + \dots}{cx + \dots}$ , on effectue la **division** :

$$f(x) = mx + p + \frac{r}{cx + d}$$

et la droite  $y = mx + p$  est asymptote, la position se lisant sur le signe du reste.

##### Réécritures qui simplifient tout.

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{\text{reste}}{cx + d} \quad \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

#### Correction de l'exercice 1 - Domaine et dérivée d'un quotient

- **Domaine** :  $x^2 - 4 \neq 0$ , donc  $x \neq \pm 2$  — trois intervalles.
- **Dérivée** : avec  $u = x + 3$  et  $v = x^2 - 4$ ,

$$f(x) = \frac{(x^2 - 4) - (x + 3)(2x)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{x^2 - 4 - 2x^2 - 6x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-x^2 - 6x - 4}{(x^2 - 4)^2}$$

- **Racines du numérateur** :  $x^2 + 6x + 4 = 0$  a pour discriminant  $36 - 16 = 20$ , donc  $x = -3 \pm \sqrt{5}$ , soit environ  $-0,7639$  et  $-5,2361$ .
- **Signe** :  $-(x^2 + 6x + 4)$  est positif **entre** les racines, négatif à l'extérieur.

- **Asymptotes verticales** :  $x = -2$  et  $x = 2$ .
- **Comportement en 2** : le numérateur tend vers  $5 > 0$  ; le dénominateur vers  $0^-$  à gauche et  $0^+$  à droite, donc  $f \rightarrow -\infty$  puis  $+\infty$  ✓
- **Asymptote horizontale** : le degré du numérateur (1) est inférieur à celui du dénominateur (2), donc  $f(x) \rightarrow 0$  en  $\pm\infty$  — **asymptote**  $y = 0$  ✓
- **Contrôles** :  $f(0) = \frac{3}{-4} = -0,75$  ✓ ;  $f(3) = \frac{6}{5} = 1,2$  ✓ ;  $f(10) = \frac{13}{96} \approx 0,1354$  ✓
- **Zéro** :  $x = -3$ , seul point où la courbe coupe l'axe des abscisses ✓

**Réponse.**  $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$ ,  $f(x) = \frac{-x^2 - 6x - 4}{(x^2 - 4)^2}$  ; asymptotes  $x = \pm 2$  et  $y = 0$ .

## Correction de l'exercice 2 - Asymptote oblique

- **Réécriture** :

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$$

- **Asymptote oblique** : la droite  $y = x + 1$ , car  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$  en  $+\infty$  ✓
- **Position** :  $f(x) - (x + 1) = \frac{1}{x} > 0$  sur  $]0; +\infty[$  — la courbe est **au-dessus** ✓
- **Écarts** : 1 en  $x = 1$  ; 0,1 en  $x = 10$  ; 0,01 en  $x = 100$  ✓
- **Dérivée** :  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ , nulle en  $x = 1$ .
- **Variations** : décroissante sur  $]0; 1]$ , croissante sur  $[1; +\infty[$ .
- **Minimum** :  $f(1) = 3$  ✓
- **Contrôles** :  $f(0,5) = 0,5 + 1 + 2 = 3,5$  et  $f(2) = 2 + 1 + 0,5 = 3,5$  ✓ — tous deux supérieurs à 3.
- **Limite en  $0^+$**  :  $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ , donc  $f(x) \rightarrow +\infty$  — **asymptote verticale**  $x = 0$  ✓
- **Convexité** :  $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ , la fonction est **convexe** sur  $]0; +\infty[$  ✓
- **Contrôle par le calcul direct** :  $\frac{x^2 + x + 1}{x} = \frac{x(x + 1) + 1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x}$  ✓

**Réponse.** Asymptote  $y = x + 1$ , courbe au-dessus ; minimum 3 en  $x = 1$ .

## Correction de l'exercice 3 - Étude avec racine

- **Domaine** :  $x^2 - 4 \geq 0$ , soit  $x \leq -2$  ou  $x \geq 2$ .
- **Dérivée** (pour  $|x| > 2$ ) :

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

- **Signe** : celui de  $x$  — négative sur  $] -\infty; -2[$ , positive sur  $]2; +\infty[$ .
- **Variations** : décroissante sur  $] -\infty; -2[$ , croissante sur  $]2; +\infty[$ , avec  $f(\pm 2) = 0$  ✓
- **Parité** :  $f$  est **paire** ✓
- **Asymptote oblique en  $+\infty$**  : on compare  $f(x)$  à  $x$ .

$$f(x) - x = \sqrt{x^2 - 4} - x = \frac{(x^2 - 4) - x^2}{\sqrt{x^2 - 4} + x} = \frac{-4}{\sqrt{x^2 - 4} + x}$$

- **Limite** :  $\rightarrow 0^-$  quand  $x \rightarrow +\infty$  — la droite  $y = x$  est **asymptote**, et la courbe est **en dessous** ✓
- **Par parité** :  $y = -x$  est asymptote en  $-\infty$  ✓

- **Contrôles** :  $f(10) = \sqrt{96} \approx 9,7980$ , soit 0,2020 sous 10 ✓ ;  $f(100) = \sqrt{9996} \approx 99,9800$ , soit 0,0200 sous 100 ✓
  - **Contrôle par la formule** :  $\frac{-4}{9,798 + 10} \approx -0,2020$  ✓
  - **Tangentes verticales** :  $f(x) \rightarrow \pm\infty$  en  $\pm 2$  — la courbe y « démarre » verticalement ✓
- Réponse.**  $D = ] - \infty ; -2] \cup [2 ; +\infty[$  ; asymptotes  $y = x$  et  $y = -x$ , courbe en dessous.

### Correction de l'exercice 4 - Quotient avec minimum

- **Réécriture** :  $f(x) = x + \frac{4}{x}$ .
  - **Dérivée** :  

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$$
  - **Signe sur  $]0 ; +\infty[$**  : celui de  $x - 2$  — négative avant 2, positive après.
  - **Minimum** :  $f(2) = 2 + 2 = 4$  ✓
  - **Contrôles** :  $f(1) = 5$  ;  $f(4) = 5$  ;  $f(3) \approx 4,3333$  ✓ — tous supérieurs à 4.
  - **Limites** :  $+\infty$  en  $0^+$  et en  $+\infty$  ✓
  - **Asymptotes** :  $x = 0$  (verticale) et  $y = x$  (oblique), la courbe étant **au-dessus** puisque  $f(x) - x = \frac{4}{x} > 0$  ✓
  - **Symétrie** :  $f\left(\frac{4}{x}\right) = f(x)$ , d'où  $f(1) = f(4)$  ✓
  - **Inégalité** :  $x + \frac{4}{x} \geq 4$  pour  $x > 0$ , avec égalité en  $x = 2$  — cas particulier de l'inégalité arithmético-géométrique ✓
  - **Tangente au minimum** : horizontale,  $y = 4$ .
  - **Généralisation** :  $x + \frac{a}{x} \geq 2\sqrt{a}$ , le minimum étant atteint en  $x = \sqrt{a}$  ✓
- Réponse.** Minimum 4 en  $x = 2$  ; asymptotes  $x = 0$  et  $y = x$ .

### Correction de l'exercice 5 - Fonction homographique complète

- **Domaine** :  $x \neq -2$ .
- **Réécriture** :  $f(x) = \frac{3(x+2) - 12}{x+2} = 3 - \frac{12}{x+2}$ .
- **Dérivée** :  

$$f'(x) = \frac{12}{(x+2)^2} > 0$$
- **Contrôle par la formule** :  $ad - bc = 3 \times 2 - (-6) \times 1 = 12$  ✓
- **Variations** : **strictement croissante** sur  $] - \infty ; -2[$  **et** sur  $] -2 ; +\infty[$  (séparément).
- **Asymptotes** :  $x = -2$  (verticale) et  $y = 3$  (horizontale) ✓
- **Position par rapport à  $y = 3$**  :  $f(x) - 3 = -\frac{12}{x+2}$ , négative pour  $x > -2$  (courbe **en dessous**) et positive pour  $x < -2$  (courbe **au-dessus**) ✓
- **Points remarquables** :  $f(0) = -3$  ;  $f(2) = 0$  ;  $f(4) = \frac{6}{6} = 1$  ;  $f(-6) = \frac{-24}{-4} = 6$  ;  
 $f(-4) = \frac{-18}{-2} = 9$  ✓
- **Comportement en  $-2$**  : le numérateur tend vers  $-12 < 0$ , donc  $f \rightarrow +\infty$  à gauche et  $-\infty$  à droite ✓
- **Centre de symétrie** : le point  $(-2 ; 3)$ , intersection des asymptotes — toute hyperbole homographique en possède un ✓

— **Vérification de la symétrie** :  $f(-2 + h) + f(-2 - h) = 3 - \frac{12}{h} + 3 + \frac{12}{h} = 6 = 2 \times 3$  ✓

**Réponse.**  $f(x) = 3 - \frac{12}{x+2}$ , croissante ; asymptotes  $x = -2$  et  $y = 3$ , centre de symétrie  $(-2; 3)$ .

### Correction de l'exercice 6 - Racine et maximum

— **Domaine** :  $9 - x^2 \geq 0$ , soit  $[-3; 3]$  ✓

— **Dérivée** (pour  $|x| < 3$ ) — produit avec  $u = x$  et  $v = \sqrt{9 - x^2}$ ,  $v' = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}$  :

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}} = \frac{9 - x^2 - x^2}{\sqrt{9 - x^2}} = \frac{9 - 2x^2}{\sqrt{9 - x^2}}$$

— **Racines** :  $x^2 = \frac{9}{2}$ , donc  $x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \approx \pm 2,1213$ .

— **Signe** : positive entre les racines, négative à l'extérieur.

— **Extremums** : maximum en  $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ , minimum en  $x = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ .

— **Valeur** :  $9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$ , donc  $\sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$  et

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} \times \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{9}{2} = 4,5$$

— **Minimum** :  $-4,5$  par imparité ✓

— **Contrôles** :  $f(2) = 2\sqrt{5} \approx 4,4721$  et  $f(2,5) = 2,5 \times \sqrt{2,75} \approx 4,1458$  — tous deux inférieurs à  $4,5$  ✓

— **Valeurs aux bornes** :  $f(\pm 3) = 0$  ✓

— **Imparité** :  $f(-x) = -f(x)$ , d'où la symétrie par rapport à l'origine ✓

— **Interprétation géométrique** :  $f(x)$  est l'aire d'un rectangle de côtés  $x$  et  $\sqrt{9 - x^2}$  inscrit dans le cercle de rayon 3 — le maximum correspond au **carré** ✓

**Réponse.** Maximum  $4,5$  en  $x = \frac{3}{\sqrt{2}}$ , minimum  $-4,5$  en  $x = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ .

### Correction de l'exercice 7 - Deux asymptotes verticales

— **Domaine** :  $x \neq \pm 1$  — trois intervalles.

— **Dérivée** : avec  $v = x^2 - 1$ ,

$$f(x) = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$$

— **Signe** : celui de  $-x$  — positive pour  $x < 0$ , négative pour  $x > 0$  (hors valeurs interdites).

— **Variations** : croissante sur  $] -\infty; -1[$  et sur  $] -1; 0]$ , décroissante sur  $[0; 1[$  et sur  $]1; +\infty[$ .

— **Extremum** :  $f(0) = -1$ , **maximum local** sur  $] -1; 1[$  ✓

— **Asymptotes verticales** :  $x = -1$  et  $x = 1$  ✓

— **Signes de  $f$**  :  $x^2 - 1 > 0$  hors de  $[-1; 1]$ , donc  $f > 0$  ; et  $f < 0$  sur  $] -1; 1[$  ✓

— **Comportement en 1** :  $f \rightarrow -\infty$  à gauche,  $+\infty$  à droite ✓

— **Asymptote horizontale** :  $y = 0$  en  $\pm\infty$  ✓

— **Parité** :  $f$  est **paire** ✓

- **Contrôles** :  $f(2) = \frac{1}{3} \approx 0,3333 \checkmark$  ;  $f(0,5) = \frac{1}{-0,75} \approx -1,3333 \checkmark$  ;  $f(1,1) = \frac{1}{0,21} \approx 4,762 \checkmark$
- **Cohérence** :  $f(0,5) \approx -1,33 < -1 = f(0)$  — le maximum local en 0 est bien confirmé  $\checkmark$
- **Piège** :  $f$  n'a **aucun** minimum ni maximum global ; elle prend toutes les valeurs de  $] -\infty ; -1] \cup ]0 ; +\infty[$ .

**Réponse.**  $f(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$  ; maximum local  $-1$  en  $0$ , asymptotes  $x = \pm 1$  et  $y = 0$ .

### Correction de l'exercice 8 - Quotient de degrés 2 sur 1

- **Division** :  $x^2 - 3x + 4 = (x - 1)(x - 2) + 2$ .
- **Contrôle** :  $(x - 1)(x - 2) + 2 = x^2 - 3x + 2 + 2 = x^2 - 3x + 4 \checkmark$
- **Réécriture** :

$$f(x) = x - 2 + \frac{2}{x - 1}$$

- **Asymptote oblique** :  $y = x - 2 \checkmark$
- **Position** :  $f(x) - (x - 2) = \frac{2}{x - 1}$ , positive pour  $x > 1$  (courbe **au-dessus**) et négative pour  $x < 1$  (**en dessous**)  $\checkmark$
- **Dérivée** :

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{(x - 1)^2} = \frac{(x - 1)^2 - 2}{(x - 1)^2}$$

- **Racines** :  $(x - 1)^2 = 2$ , donc  $x = 1 \pm \sqrt{2}$ , soit environ  $2,4142$  et  $-0,4142$ .
- **Extremums** :
- en  $x = 1 + \sqrt{2}$  :  $f = \sqrt{2} - 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 1 \approx 1,8284$  (**minimum local**) ;
- en  $x = 1 - \sqrt{2}$  :  $f = -\sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} = -2\sqrt{2} - 1 \approx -3,8284$  (**maximum local**)  $\checkmark$
- **Contrôles** :  $f(2) = \frac{4 - 6 + 4}{1} = 2 > 1,8284 \checkmark$  ;  $f(3) = \frac{9 - 9 + 4}{2} = 2 > 1,8284 \checkmark$
- $f(0) = \frac{4}{-1} = -4 < -3,8284 \checkmark$  et  $f(-1) = \frac{1 + 3 + 4}{-2} = -4 \checkmark$
- **Asymptote verticale** :  $x = 1$ , avec  $f \rightarrow -\infty$  à gauche et  $+\infty$  à droite (numérateur  $\rightarrow 2 > 0$ )  $\checkmark$

**Réponse.** Asymptote  $y = x - 2$  ; min local  $2\sqrt{2} - 1 \approx 1,83$  et max local  $-2\sqrt{2} - 1 \approx -3,83$ .

### Correction de l'exercice 9 - Fonction avec racine au dénominateur

- **Domaine** :  $\mathbb{R}$ , car  $x^2 + 1 > 0$ .
- **Dérivée** : avec  $u = x$  et  $v = \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $v' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x \times \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{\frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{1}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

- **Signe** : toujours **strictement positive** — la fonction est **strictement croissante** sur  $\mathbb{R} \checkmark$
- **Limites** : en divisant par  $|x|$ ,

$$f(x) = \frac{x}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \rightarrow \pm 1 \text{ en } \pm \infty$$

- **Asymptotes horizontales** :  $y = 1$  en  $+\infty$  et  $y = -1$  en  $-\infty$  ✓
- **Image** :  $f(\mathbb{R}) = ]-1; 1[$  — les bornes ne sont **jamais atteintes** ✓
- **Imparité** :  $f(-x) = -f(x)$  ✓
- **Contrôles** :  $f(0) = 0$  ;  $f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7071$  ;  $f(3) = \frac{3}{\sqrt{10}} \approx 0,9487$  ;  
 $f(10) = \frac{10}{\sqrt{101}} \approx 0,9950$  ✓
- **Tangente en 0** :  $f(0) = 1$ , donc  $y = x$  ✓
- **Position par rapport à cette tangente** : pour  $x > 0$ ,  $\sqrt{x^2 + 1} > 1$  donc  $f(x) < x$  — la courbe est **en dessous** ✓
- **Point d'inflexion** : en  $x = 0$ , où la concavité change (par imparité) ✓

**Réponse.**  $f(x) = (x^2 + 1)^{-3/2} > 0$  : strictement croissante, image  $] -1 ; 1[$ .

### Correction de l'exercice 10 - Étude et résolution d'équation

- **Domaine** :  $\mathbb{R}$ .
- **Dérivée** :

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 + 3) - 2x^2 \times 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{4x^3 + 12x - 4x^3}{(x^2 + 3)^2} = \frac{12x}{(x^2 + 3)^2}$$

- **Signe** : celui de  $x$  — décroissante sur  $] -\infty ; 0]$ , croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .
- **Minimum** :  $f(0) = 0$ , minimum **global** ✓
- **Limite** :  $f(x) \rightarrow 2$  en  $\pm \infty$  — **asymptote horizontale**  $y = 2$  ✓
- **Image** :  $[0 ; 2[$  ✓
- **Équation**  $f(x) = 1$  :  $2x^2 = x^2 + 3$ , donc  $x^2 = 3$  et  
 $x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1,7321$
- **Contrôle** :  $f(\sqrt{3}) = \frac{6}{6} = 1$  ✓
- **Parité** :  $f$  est **paire**, d'où les deux solutions symétriques ✓
- **Équation**  $f(x) = 2$  :  $2x^2 = 2x^2 + 6$  donnerait  $0 = 6$  — **impossible**, la valeur 2 n'est jamais atteinte ✓
- **Équation**  $f(x) = 3$  :  $2x^2 = 3x^2 + 9$  donne  $x^2 = -9$  — impossible aussi ✓
- **Contrôles** :  $f(1) = \frac{2}{4} = 0,5$  ✓ ;  $f(3) = \frac{18}{12} = 1,5$  ✓ ;  $f(10) = \frac{200}{103} \approx 1,9417$  ✓
- **Réécriture** :  $f(x) = 2 - \frac{6}{x^2 + 3}$ , qui rend tout immédiat ✓

**Réponse.** Minimum 0 en  $x = 0$ , asymptote  $y = 2$ , image  $[0 ; 2[$  ;  $f(x) = 1$  pour  $x = \pm\sqrt{3}$ .

### Correction de l'exercice 11 - Racine d'un trinôme

- **Domaine** :  $-x^2 + 4x = x(4 - x) \geq 0$ , soit  $x \in [0 ; 4]$  ✓
- **Dérivée** (pour  $0 < x < 4$ ) :

$$f'(x) = \frac{-2x + 4}{2\sqrt{-x^2 + 4x}} = \frac{2 - x}{\sqrt{-x^2 + 4x}}$$

- **Signe** : celui de  $2 - x$  — positive avant 2, négative après.

- **Maximum** :  $f(2) = \sqrt{-4 + 8} = 2 \checkmark$
- **Valeurs aux bornes** :  $f(0) = f(4) = 0 \checkmark$
- **Symétrie** : le domaine et la fonction sont symétriques par rapport à  $x = 2$  ; on vérifie  $f(1) = \sqrt{3}$  et  $f(3) = \sqrt{3} \checkmark$
- **Nature de la courbe** : en élevant au carré,  $y^2 = -x^2 + 4x$ , soit  $x^2 - 4x + y^2 = 0$  et
 
$$(x - 2)^2 + y^2 = 4$$
- **Conclusion** : la courbe est le **demi-cercle supérieur** de centre  $(2; 0)$  et de rayon  $2 \checkmark$
- **Contrôles** :  $f(1) = \sqrt{3} \approx 1,7321$ , et  $(1 - 2)^2 + 3 = 4 \checkmark$  ;  
 $f(3,5) = \sqrt{-12,25 + 14} = \sqrt{1,75} \approx 1,3229$ , et  $2,25 + 1,75 = 4 \checkmark$
- **Tangentes verticales** : en  $x = 0$  et  $x = 4$ ,  $f$  tend vers  $\pm\infty$  — cohérent avec un cercle, dont la tangente  $y$  est verticale  $\checkmark$
- **Aire sous la courbe** : celle d'un demi-disque de rayon  $2$ , soit  $\frac{\pi \times 4}{2} = 2\pi \approx 6,283$ .

**Réponse.**  $D = [0; 4]$ , maximum  $2$  en  $x = 2$  : c'est le demi-cercle supérieur de centre  $(2; 0)$  et rayon  $2$ .

### Correction de l'exercice 12 - Comparaison de deux quotients

- **Différence** :

$$f(x) - g(x) = \frac{x(x+2) - (x+1)^2}{(x+1)(x+2)} = \frac{x^2 + 2x - x^2 - 2x - 1}{(x+1)(x+2)} = \frac{-1}{(x+1)(x+2)}$$

- **Signe** : sur  $]0; +\infty[$ , le dénominateur est positif, donc la différence est **négative**.
- **Conclusion** :  $f(x) < g(x)$  pour tout  $x > 0 \checkmark$
- **Contrôles** :  $f(1) = 0,5$  contre  $g(1) = \frac{2}{3} \approx 0,6667 \checkmark$  ;  $f(10) = \frac{10}{11} \approx 0,9091$  contre  $g(10) = \frac{11}{12} \approx 0,9167 \checkmark$
- **Écart** :  $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$ , qui vaut  $\frac{1}{6} \approx 0,1667$  en  $x = 1$  et  $\frac{1}{132} \approx 0,00758$  en  $x = 10$  — il tend vers  $0 \checkmark$
- **Limites communes** : les deux fonctions tendent vers  $1$  en  $+\infty$ , avec la même asymptote  $y = 1 \checkmark$
- **Réécritures** :  $f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$  et  $g(x) = 1 - \frac{1}{x+2}$  — la comparaison devient alors immédiate, puisque  $\frac{1}{x+1} > \frac{1}{x+2} \checkmark$
- **Variations** : les deux fonctions sont **croissantes** ( $f' = \frac{1}{(x+1)^2}$  et  $g' = \frac{1}{(x+2)^2}$ )  $\checkmark$
- **Interprétation** :  $g$  est le « décalé » de  $f$  d'une unité vers la gauche, donc toujours un peu plus avancé dans sa montée vers  $1 \checkmark$

**Réponse.**  $f(x) - g(x) = \frac{-1}{(x+1)(x+2)} < 0 : f < g$  sur  $]0; +\infty[$ .

### Correction de l'exercice 13 - Étude d'une fonction avec paramètre

- **Dérivée** :

$$f'_a(x) = \frac{(x^2 + a) - x \times 2x}{(x^2 + a)^2} = \frac{a - x^2}{(x^2 + a)^2}$$

- **Racine positive** :  $x = \sqrt{a}$ .
- **Signe** : positive avant, négative après — **maximum** en  $x = \sqrt{a} \checkmark$

— **Valeur :**

$$f_a(\sqrt{a}) = \frac{\sqrt{a}}{a + a} = \frac{\sqrt{a}}{2a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

— **Contrôles :** pour  $a = 1$ , le maximum vaut  $\frac{1}{2}$  en  $x = 1$  ✓ ; pour  $a = 4$ , il vaut  $\frac{1}{4}$  en  $x = 2$  ✓

— **Vérification directe** pour  $a = 4$  :  $f_4(2) = \frac{2}{8} = 0,25$  ✓ et  $f_4(1) = \frac{1}{5} = 0,2 < 0,25$  ✓

— **Lecture :** plus  $a$  est grand, plus le maximum est **bas** et **éloigné** de l'origine ✓

— **Limite en  $+\infty$  :** 0 pour tout  $a$  — asymptote horizontale  $y = 0$  ✓

— **Produit remarquable :**  $\sqrt{a} \times \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2}$  — l'aire du rectangle défini par le sommet est **indépendante** de  $a$  ✓

— **Cas  $a = 0$  :**  $f_0(x) = \frac{1}{x}$ , strictement décroissante, sans maximum — le paramètre  $a > 0$  est essentiel ✓

**Réponse.** Maximum  $\frac{1}{2\sqrt{a}}$  atteint en  $x = \sqrt{a}$ .

### Correction de l'exercice 14 - Somme d'une fonction et de son inverse

— **Réécriture :**

$$f(x) = \frac{(x^2 + 1) + x}{x^2 + 1} = 1 + \frac{x}{x^2 + 1}$$

— **Dérivée :** la dérivée de  $\frac{x}{x^2 + 1}$  vaut  $\frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$ , donc

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{(x^2 + 1)^2}$$

— **Signe :** positive sur  $] -1 ; 1[$ , négative ailleurs.

— **Variations :** décroissante sur  $] -\infty ; -1]$ , croissante sur  $[-1 ; 1]$ , décroissante sur  $[1 ; +\infty[$ .

— **Extremums :**

$$f(1) = 1 + \frac{1}{2} = 1,5 \text{ (maximum)} \quad f(-1) = 1 - \frac{1}{2} = 0,5 \text{ (minimum)}$$

— **Limite :**  $f(x) \rightarrow 1$  en  $\pm\infty$  — **asymptote horizontale**  $y = 1$  ✓

— **Image :**  $f(\mathbb{R}) = [0,5 ; 1,5]$  — les deux bornes **sont** atteintes ✓

— **Contrôles :**  $f(0) = 1$  ✓ ;  $f(2) = \frac{7}{5} = 1,4$  ✓ ;  $f(-2) = \frac{3}{5} = 0,6$  ✓ ;  $f(10) = \frac{111}{101} \approx 1,0990$  ✓

— **Symétrie :**  $f(x) + f(-x) = 2$  — la courbe admet le point  $(0 ; 1)$  pour **centre de symétrie** ✓

— **Vérification :**  $f(2) + f(-2) = 1,4 + 0,6 = 2$  ✓

— **Positivité :**  $f(x) \geq 0,5 > 0$  pour tout  $x$  — la fonction ne s'annule jamais, ce qui se voit aussi sur le discriminant de  $x^2 + x + 1$  ( $1 - 4 = -3 < 0$ ) ✓

**Réponse.**  $f(x) = 1 + \frac{x}{x^2 + 1}$  ; image  $[0,5 ; 1,5]$ , asymptote  $y = 1$ , centre de symétrie  $(0 ; 1)$ .

### Correction de l'exercice 15 - Racine et asymptote

— **Sous le radical :**  $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 \geq 1 > 0$  — le domaine est  $\mathbb{R}$  ✓

— **Dérivée :**

$$f(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

- **Signe** : celui de  $x+1$  — décroissante sur  $] -\infty ; -1]$ , croissante sur  $[-1 ; +\infty[$ .
- **Minimum** :  $f(-1) = \sqrt{1} = 1$ , minimum **global** ✓
- **Asymptote en  $+\infty$**  : on compare à  $x+1$ .

$$f(x) - (x+1) = \frac{(x^2+2x+2) - (x+1)^2}{f(x) + x+1} = \frac{1}{f(x) + x+1} \rightarrow 0^+$$

- **Conclusion** :  $y = x+1$  est asymptote en  $+\infty$ , la courbe étant **au-dessus** ✓
- **Asymptote en  $-\infty$**  : par un calcul analogue,  $y = -(x+1)$ , la courbe étant également au-dessus ✓
- **Contrôles** :  $f(10) = \sqrt{122} \approx 11,0454$ , soit 0,0454 au-dessus de 11 ✓
- **Contrôle par la formule** :  $\frac{1}{11,0454 + 11} \approx 0,0454$  ✓
- $f(-10) = \sqrt{82} \approx 9,0554$ , soit 0,0554 au-dessus de 9 ✓
- **Symétrie** :  $f(-2-x) = f(x)$  — la courbe est symétrique par rapport à la verticale  $x = -1$  ✓
- **Vérification** :  $f(0) = \sqrt{2} \approx 1,4142$  et  $f(-2) = \sqrt{2}$  ✓
- **Allure** : une **branche d'hyperbole**, puisque  $y^2 - (x+1)^2 = 1$  ✓

**Réponse.** Minimum 1 en  $x = -1$  ; asymptotes  $y = x+1$  et  $y = -(x+1)$ , courbe au-dessus.

### Correction de l'exercice 16 - Synthèse : étude complète

a) **Division** :  $x^2 + 2 = (x-2)(x+2) + 6$ .

- **Contrôle** :  $(x-2)(x+2) + 6 = x^2 - 4 + 6 = x^2 + 2$  ✓
- **Réécriture** :

$$f(x) = x + 2 + \frac{6}{x-2}$$

- **Asymptote oblique** :  $y = x+2$  ✓
- **Position** :  $f(x) - (x+2) = \frac{6}{x-2} > 0$  sur  $]2 ; +\infty[$  — la courbe est **au-dessus** ✓
- **Écarts** : 6 en  $x = 3$  ; 1 en  $x = 8$  ; 0,5 en  $x = 14$  ✓

b) **Dérivée** :

$$f(x) = 1 - \frac{6}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - 6}{(x-2)^2}$$

- **Racine** :  $(x-2)^2 = 6$ , donc  $x = 2 + \sqrt{6} \approx 4,4495$  (l'autre racine est hors du domaine).
- **Signe** : négative avant, positive après — **minimum** ✓
- **Valeur** :

$$f(2 + \sqrt{6}) = 4 + \sqrt{6} + \frac{6}{\sqrt{6}} = 4 + \sqrt{6} + \sqrt{6} = 4 + 2\sqrt{6} \approx 8,8990$$

- **Contrôles** :  $f(4) = \frac{18}{2} = 9 > 8,899$  ✓ ;  $f(5) = \frac{27}{3} = 9 > 8,899$  ✓ ;  $f(4,5) = \frac{22,25}{2,5} = 8,9$  ✓
- **Limites** :  $+\infty$  en  $2^+$  (numérateur  $\rightarrow 6 > 0$ ) et en  $+\infty$  ✓

c) **Équation**  $f(x) = 8$ .

- $x^2 + 2 = 8(x-2)$  donne  $x^2 - 8x + 18 = 0$ .
- **Discriminant** :  $64 - 72 = -8 < 0$  — **aucune** solution ✓

- **Cohérence** : le minimum de  $f$  vaut  $8,899 > 8$ , donc l'équation ne pouvait **pas** avoir de solution ✓
- **Équation**  $f(x) = 9$  en revanche :  $x^2 - 9x + 20 = 0$ , de discriminant  $81 - 80 = 1$ , donc  $x = \frac{9 \pm 1}{2} \in \{4; 5\}$  — **deux** solutions, celles trouvées au contrôle ci-dessus ✓
- **Seuil d'existence** : l'équation  $f(x) = k$  a des solutions si et seulement si  $k \geq 4 + 2\sqrt{6}$  ✓

**Réponse.** a)  $y = x + 2$ , courbe au-dessus · b) minimum  $4 + 2\sqrt{6} \approx 8,90$  en  $x = 2 + \sqrt{6}$  · c) aucune solution.