

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : modélisation, convexité et algorithmes

Dérivation et étude des fonctions — Première spé maths Corrections détaillées

Boîte à outils

Convexité et dérivée seconde.

$$f'' \geq 0 \text{ sur } I \Leftrightarrow f \text{ convexe sur } I \quad f'' \leq 0 \Leftrightarrow f \text{ concave}$$

- **Convexe** : la courbe est **au-dessus** de ses tangentes et **en dessous** de ses cordes.
- **Concave** : l'inverse.
- **Point d'inflexion** : f'' change de signe.

Interprétation économique.

- $f' > 0$ et $f'' > 0$: croissance **accélérée**.
- $f' > 0$ et $f'' < 0$: croissance **ralentie** (rendements décroissants).
- Le **point d'inflexion** marque le moment où la croissance cesse d'accélérer — souvent le point le plus important d'un modèle.

Recherche automatisée d'un extremum.

```
def maximum(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    xm = a
    for k in range(n + 1):
        x = a + k * h
        if f(x) > f(xm):
            xm = x
    return xm
```

Dichotomie sur la dérivée. Un extremum intérieur vérifie $f'(x) = 0$; on peut donc appliquer la dichotomie à f' dès qu'elle change de signe sur $[a; b]$.

Les trois questions à se poser devant un modèle.

1. Le **domaine** a-t-il un sens physique ou économique ?
2. L'optimum trouvé est-il **dans** ce domaine ?
3. L'ordre de grandeur du résultat est-il **plausible** ?

Correction de l'exercice 1 - Convexité d'une cubique

- **Dérivées** : $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ et $f'(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$.
- **Signe de f'** : négative pour $x < 1$, positive pour $x > 1$.
- **Convexité** : f est **concave** sur $] -\infty ; 1]$ et **convexe** sur $[1 ; +\infty[$.
- **Point d'inflexion** : $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, donc $I(1 ; 0)$ ✓
- **Extremums** : $f(x) = 0$ pour $x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, soit environ 0,4226 et 1,5774.
- **Valeurs** : $f(0,4226) \approx 0,3849$ (maximum local) et $f(1,5774) \approx -0,3849$ (minimum local) ✓
- **Symétrie** : les deux extremums sont **opposés** et symétriques par rapport à $I(1 ; 0)$ — propriété générale du point d'inflexion d'une cubique ✓
- **Contrôle** : $f(0) + f(2) = 0 + 0 = 0 = 2f(1)$ ✓
- **Racines** : $f(x) = x(x - 1)(x - 2)$, soit 0, 1 et 2 ✓

- **Position par rapport à la tangente en I** : $f(1) = -1$, tangente $y = -x + 1$, et $f(x) - (-x + 1) = (x - 1)^3$ — la tangente **traverse** ✓
- **Ordre des abscisses** : $0,42 < 1 < 1,58$ — l'inflexion est bien **entre** les deux extremums ✓

Réponse. Concave avant 1, convexe après ; point d'inflexion $I(1 ; 0)$.

Correction de l'exercice 2 - Modèle de croissance

- **Réécriture** : $N(t) = 100 - \frac{2500}{t^2 + 25}$.

- **Dérivée** :

$$N'(t) = 2500 \times \frac{2t}{(t^2 + 25)^2} = \frac{5000t}{(t^2 + 25)^2}$$

- **Signe** : positive pour $t > 0$ — croissance **continue** ✓
- **Limite** : $N(t) \rightarrow 100$ — la saturation est à 100 000 utilisateurs ✓
- **Dérivée seconde** : en dérivant $\frac{5000t}{(t^2 + 25)^2}$,

$$N''(t) = \frac{5000(t^2 + 25)^2 - 5000t \times 2(t^2 + 25) \times 2t}{(t^2 + 25)^4} = \frac{5000(25 - 3t^2)}{(t^2 + 25)^3}$$

- **Annulation** : $3t^2 = 25$, donc $t = \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2,8868$ mois.
- **Point d'inflexion** : $N(2,8868) = \frac{100 \times 8,3333}{33,3333} = 25$ milliers ✓
- **Interprétation** : la croissance **accélère** jusqu'au mois 2,9, puis **ralentit** — c'est le pic de recrutement ✓
- **Vitesse maximale** : $N'(2,8868) = \frac{5000 \times 2,8868}{1111,11} \approx 12,99$ milliers par mois ✓
- **Contrôles** : $N(1) = \frac{100}{26} \approx 3,846$; $N(5) = \frac{2500}{50} = 50$; $N(10) = \frac{10\,000}{125} = 80$;
 $N(20) = \frac{40\,000}{425} \approx 94,12$ ✓
- **Contrôles de N'** : $N'(1) = \frac{5000}{676} \approx 7,396$ et $N'(5) = \frac{25\,000}{2500} = 10$ — la vitesse monte puis redescend ✓
- **Lecture stratégique** : atteindre 50 000 utilisateurs demande 5 mois, mais 80 000 en demande 10 — la deuxième moitié coûte deux fois plus de temps.

Réponse. Croissance vers 100 milliers ; inflexion à $t = \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2,89$ mois, pour $N = 25$ milliers.

Correction de l'exercice 3 - Rendements décroissants

- **Dérivée** : $P'(x) = \frac{60}{2\sqrt{x}} = \frac{30}{\sqrt{x}}$.
- **Signe** : positive — la production **augmente** avec l'effectif ✓
- **Dérivée seconde** : $P''(x) = 30 \times \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} = -\frac{15}{x^{3/2}} < 0$.
- **Conclusion** : la fonction est **concave** — c'est la loi des **rendements décroissants** ✓

- **Productivité marginale** : $P'(x) = \frac{30}{\sqrt{x}}$, qui **décroît** : le 100^e ouvrier apporte moins que le 10^e.
- **Valeurs** : $P'(9) = 10$ t/ouvrier ; $P'(100) = 3$ t/ouvrier ; $P'(900) = 1$ t/ouvrier ✓
- **Production** : $P(9) = 180$ t ; $P(100) = 600$ t ; $P(900) = 1800$ t ✓
- **Contrôle de cohérence** : passer de 100 à 101 ouvriers ajoute $P(101) - P(100) = 60\sqrt{101} - 600 \approx 602,99 - 600 = 2,99$ t, proche de $P'(100) = 3$ ✓
- **Productivité moyenne** : $\frac{P(x)}{x} = \frac{60}{\sqrt{x}}$, également décroissante — elle vaut **le double** de la marginale ✓
- **Contrôle** : $\frac{600}{100} = 6 = 2 \times 3$ ✓
- **Décision économique** : embaucher est rentable tant que la productivité marginale ($\times$ prix de la tonne) dépasse le salaire — d'où un effectif optimal fini, malgré une production toujours croissante.

Réponse. $P'' < 0$: concave, rendements décroissants (productivité marginale $\frac{30}{\sqrt{x}}$).

Correction de l'exercice 4 - Algorithme de recherche d'extremum

- **Pas** : $h = \frac{4}{8} = 0,5$.
- **Points testés** : 0 ; 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 3,5 ; 4.
- **Valeurs de f** : 0 ; 1,75 ; 3 ; 3,75 ; 4 ; 3,75 ; 3 ; 1,75 ; 0.
- **Affichage** : $x = 2$ et $f(x) = 4$ ✓
- **Contrôle exact** : $f'(x) = 4 - 2x$, nulle en $x = 2$, avec $f(2) = 8 - 4 = 4$ — le balayage tombe **exactement** sur l'optimum ✓
- **Pourquoi cette chance** : le sommet 2 est un multiple du pas 0,5 ; avec $n = 7$, le pas serait $\frac{4}{7} \approx 0,5714$ et le balayage donnerait $x = \frac{16}{7} \approx 2,286$, avec $f \approx 3,918$ — une **approximation** seulement ✓
- **Précision générale** : l'erreur sur x est au pire $\frac{h}{2}$, et l'erreur sur f de l'ordre de h^2 (car la fonction est plate au sommet).
- **Contrôle** : avec $n = 7$, l'erreur sur f vaut $4 - 3,918 = 0,082$, à comparer à $h^2 = 0,327$ — du bon ordre ✓
- **Détail du test** : l'inégalité **stricte** de la comparaison $f(x) > f(x_m)$ garde le **premier** maximum rencontré en cas d'égalité — un choix arbitraire mais qu'il faut connaître.
- **Amélioration** : augmenter n améliore linéairement la précision sur x ; une **dichotomie sur f** convergerait bien plus vite.

Réponse. Il affiche 2 et 4 (l'optimum exact, car 2 est un multiple du pas).

Correction de l'exercice 5 - Coût et convexité

- **Coût marginal** : $C'(q) = 0,03q^2 - 1,2q + 15$.
- **Minimum du coût marginal** : on dérive à nouveau.
$$C''(q) = 0,06q - 1,2$$
- **Annulation** : $q = 20$.
- **Signe** : C'' est négative avant 20, positive après — le coût marginal est **minimal** en $q = 20$ ✓
- **Valeur** : $C'(20) = 0,03 \times 400 - 24 + 15 = 12 - 24 + 15 = 3$ € par unité.
- **Point d'inflexion du coût** : (20 ; $C(20)$) avec $C(20) = 80 - 240 + 300 + 200 = 340$ € ✓

- **Interprétation** : jusqu'à 20 unités, chaque unité supplémentaire coûte **moins** que la précédente (économies d'échelle) ; au-delà, elle coûte **plus** (saturation des capacités) ✓
- **Contrôles** : $C'(10) = 3 - 12 + 15 = 6$ € et $C'(30) = 27 - 36 + 15 = 6$ € — tous deux supérieurs à 3 € ✓
- **Signe du coût marginal** : le discriminant de $0,03q^2 - 1,2q + 15$ vaut $1,44 - 1,8 = -0,36 < 0$, donc C' est **toujours positive** — le coût est strictement croissant, comme il se doit ✓
- **Coût moyen minimal** : $\frac{C(q)}{q} = 0,01q^2 - 0,6q + 15 + \frac{200}{q}$, dont la dérivée $0,02q - 0,6 - \frac{200}{q^2}$ s'annule vers $q \approx 41,2$.
- **Contrôle** : $\frac{C(41)}{41} = \frac{689,21 - 1008,6 + 615 + 200}{41} \approx \frac{495,61}{41} \approx 12,088$ € et $C'(41) \approx 50,43 - 49,2 + 15 = 16,23$ € — attention, ils ne coïncident pas encore, le minimum du coût moyen est un peu plus loin.

Réponse. Le coût marginal est minimal en $q = 20$, où il vaut 3 € (point d'inflexion du coût).

Correction de l'exercice 6 - Modélisation d'une épidémie

- **Valeur initiale** : $f(0) = \frac{1000}{10} = 100$.
- **Limite** : $0,7^t \rightarrow 0$, donc $f(t) \rightarrow 1000$ — saturation à un million de personnes ✓
- **Croissance** : le dénominateur $1 + 9 \times 0,7^t$ **décroît**, donc f **croît** ✓
- **Pic de propagation** : c'est le point d'inflexion, où la vitesse f' est maximale.
- **Propriété de la courbe logistique** : le point d'inflexion se situe à **la moitié** de la saturation, soit

$$f(t) = 500$$

- **Résolution** : $\frac{1000}{1 + 9 \times 0,7^t} = 500$ donne $1 + 9 \times 0,7^t = 2$, soit $0,7^t = \frac{1}{9}$ et $t = \frac{\ln(1/9)}{\ln 0,7} = \frac{-2,1972}{-0,35667} \approx 6,1602$ semaines
- **Contrôles** : $f(6) = \frac{1000}{1 + 9 \times 0,117649} = \frac{1000}{2,0588} \approx 485,72$ ✓ et $f(7) = \frac{1000}{1 + 9 \times 0,0823543} = \frac{1000}{1,7412} \approx 574,32$ ✓
- **Encadrement** : $485,7 < 500 < 574,3$, donc le pic est bien entre les semaines 6 et 7 ✓
- **Autres valeurs** : $f(3) \approx \frac{1000}{4,087} \approx 244,7$; $f(10) \approx \frac{1000}{1,2542} \approx 797,3$; $f(20) \approx \frac{1000}{1,00729} \approx 992,8$ ✓
- **Lecture épidémiologique** : après la semaine 6, la propagation **ralentit** — c'est le signal que les mesures ou l'immunité commencent à agir, même si le nombre total continue de croître ✓
- **Piège d'interprétation** : le pic de **propagation** (nouveaux cas) est bien avant la fin de la croissance des cas **cumulés**.

Réponse. Pic de propagation à $t \approx 6,16$ semaines, quand $f = 500$ (moitié de la saturation).

Correction de l'exercice 7 - Position par rapport aux cordes

- **Traduction** : la courbe est **en dessous** de la corde joignant les points d'abscisses a et b — c'est la définition de la **convexité** ✓
- **Cas particulier** $t = \frac{1}{2}$: l'inégalité devient

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

- **Démonstration** : la différence vaut

$$\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{2a^2+2b^2-a^2-2ab-b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0$$

- La différence est un carré divisé par 4, donc **positive** ✓

- **Cas général** : posons $c = (1-t)a + tb$. Alors

$$(1-t)a^2 + tb^2 - c^2 = t(1-t)(a-b)^2 \geq 0$$

- **Vérification pour** $t = \frac{1}{2}$: $\frac{1}{4}(a-b)^2$ ✓ — cohérent.

- **Contrôle numérique** : $a = 0$, $b = 4$, $t = 0,25$ donnent $c = 1$, et $1 \leq 0,75 \times 0 + 0,25 \times 16 = 4$ ✓

- **Écart prévu** : $0,25 \times 0,75 \times 16 = 3$, et $4 - 1 = 3$ ✓

- **Cas d'égalité** : $t = 0$, $t = 1$ ou $a = b$ ✓

- **Lien avec $f' \geq 0$** : $f'(x) = 2 > 0$, ce qui garantit la convexité sur $\mathbb{R}$ — on retrouve le résultat sans calcul ✓

- **Application** : cette inégalité est la version discrète de « la moyenne des carrés dépasse le carré de la moyenne », base du calcul de la variance.

Réponse. La différence vaut $t(1-t)(a-b)^2 \geq 0$: x^2 est convexe, sous ses cordes.

Correction de l'exercice 8 - Dichotomie sur la dérivée

- **Dérivée** : $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$.

- **Racines exactes** : $\Delta = 36 - 12 = 24$, donc $x = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$, soit environ 0,1835 et 1,8165.

- **Minimum local** : en $x = 1,8165$ (là où f passe de $-$ à $+$) ✓

- **Dichotomie sur $[1; 2]$** : $f(1) = -2 < 0$ et $f(2) = 12 - 12 + 1 = 1 > 0$ ✓

- **Étape 1** : $f(1,5) = 6,75 - 9 + 1 = -1,25 < 0 \rightarrow$ on garde $[1,5; 2]$.

- **Étape 2** : $f(1,75) = 9,1875 - 10,5 + 1 = -0,3125 < 0 \rightarrow$ on garde $[1,75; 2]$.

- **Étape 3** : $f(1,875) = 10,546875 - 11,25 + 1 = 0,296875 > 0 \rightarrow$ on garde $[1,75; 1,875]$.

- **Étape 4** : $f(1,8125) = 9,85546875 - 10,875 + 1 = -0,01953125 < 0 \rightarrow$ on garde $[1,8125; 1,875]$.

- **Encadrement** : $1,8125 < x_{\min} < 1,875$, d'amplitude $0,0625 < 0,1$ ✓

- **Valeur du minimum** : avec $x = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$, on obtient $f(x) \approx -0,0887$.

- **Contrôles** : $f(1,8) = 5,832 - 9,72 + 1,8 + 2 = -0,088$ et $f(1,9) = 6,859 - 10,83 + 1,9 + 2 = -0,071$ — tous deux supérieurs à $-0,0887$ ✓

- **Maximum local** : en $x = 0,1835$, avec $f(0,1835) \approx 2,0887$ ✓

- **Efficacité** : 4 étapes de dichotomie donnent 0,0625 d'amplitude, là où un balayage au dixième demanderait jusqu'à 10 évaluations ✓

Réponse. $1,8125 < x_{\min} < 1,875$ (valeur exacte $1 + \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 1,8165$).

Correction de l'exercice 9 - Deux modèles concurrents

- **Croisement** : $20\sqrt{t} = 5t$ donne $4\sqrt{t} = t$, soit $\sqrt{t}(\sqrt{t} - 4) = 0$ et

$$t = 0 \quad \text{ou} \quad t = 16$$
- **Valeurs au croisement** : $f(16) = 80 = g(16)$ ✓
- **Position** : pour $0 < t < 16$, on a $f > g$; pour $t > 16$, $g > f$.
- **Contrôles** : $f(4) = 40$ contre $g(4) = 20$ ✓ ; $f(25) = 100$ contre $g(25) = 125$ ✓
- **Vitesses** : $f(t) = \frac{10}{\sqrt{t}}$ et $g'(t) = 5$.
- **Égalité des vitesses** : $\frac{10}{\sqrt{t}} = 5$ donne $\sqrt{t} = 2$, soit $t = 4$ ✓
- **Lecture** : f croît plus vite que g **avant** $t = 4$, moins vite après — alors que le **croisement des valeurs** n'a lieu qu'en $t = 16$ ✓
- **Distinction essentielle** : croître plus vite (dérivée) et être plus grand (valeur) sont deux choses différentes.
- **Convexités** : $f'(t) = -\frac{5}{t^{3/2}} < 0$ (concave) et $g'' = 0$ (affine) ✓
- **Écart maximal** : $d(t) = 20\sqrt{t} - 5t$, avec $d'(t) = \frac{10}{\sqrt{t}} - 5 = 0$ en $t = 4$ — l'écart est **maximal** en $t = 4$, où il vaut $40 - 20 = 20$ ✓
- **Contrôle** : $d(1) = 15$; $d(9) = 60 - 45 = 15$; $d(4) = 20$ ✓

Réponse. Croisement en $t = 16$; mais les vitesses s'égalisent dès $t = 4$, où l'écart est maximal (20).

Correction de l'exercice 10 - Fonction et algorithme de seuil

Algorithme.

```
x = 0
while 100*x/(x+10) <= 90:
    x = x + 1
print(x)
```

- **Résolution exacte** : $\frac{100x}{x+10} > 90$ équivaut à $100x > 90x + 900$ (le dénominateur est positif), soit $10x > 900$ et

$$x > 90$$
- **Réponse** : $x = 91$.
- **Vérifications** : $f(90) = \frac{9000}{100} = 90$ exactement (donc pas > 90) ✓ et
 $f(91) = \frac{9100}{101} \approx 90,099 > 90$ ✓
- **Variations** : $f(x) = 100 - \frac{1000}{x+10}$, donc $f'(x) = \frac{1000}{(x+10)^2} > 0$ — croissante ✓
- **Limite** : $f(x) \rightarrow 100$ — asymptote horizontale, jamais atteinte ✓
- **Terminaison de la boucle** : garantie car f croît vers $100 > 90$ ✓
- **Piège majeur** : avec un seuil de 100 ou plus, la boucle tournerait **indéfiniment** — il faut toujours comparer le seuil à la **limite** ✓
- **Contrôles** : $f(10) = 50$; $f(40) = 80$; $f(190) = \frac{19000}{200} = 95$ ✓
- **Pour dépasser 99** : $x > 990$, soit $x = 991$ — chaque point supplémentaire coûte dix fois plus ✓

Réponse. $x = 91$ (avec $f(91) \approx 90,10$).

Correction de l'exercice 11 - Optimisation d'une recette

— **Recette** :

$$R(p) = p \times q(p) = \frac{1000p}{p+5}$$

— **Réécriture** : $R(p) = 1000 - \frac{5000}{p+5}$.

— **Dérivée** :

$$R'(p) = \frac{5000}{(p+5)^2} > 0$$

— **Conclusion** : la recette est **strictement croissante** — elle n'a **pas de maximum atteint** ✓

— **Limite** : $R(p) \rightarrow 1000$ quand $p \rightarrow +\infty$ — la recette est **majorée par 1000**, sans jamais l'atteindre.

— **Contrôles** : $R(5) = \frac{5000}{10} = 500$; $R(20) = \frac{20\,000}{25} = 800$; $R(95) = \frac{95\,000}{100} = 950$;
 $R(495) = \frac{495\,000}{500} = 990$ ✓

— **Commentaire sur le modèle** : il prédit qu'il faut augmenter le prix **indéfiniment**, ce qui est économiquement absurde — le modèle de demande est **irréaliste** pour les grands prix.

— **Pourquoi** : $q(p) = \frac{1000}{p+5}$ ne tombe jamais à zéro, alors qu'une demande réelle s'annule au-delà d'un certain prix.

— **Modèle plus réaliste** : $q(p) = 200 - 2p$ donnerait $R(p) = 200p - 2p^2$, maximale en $p = 50$ avec $R = 5000$ ✓

— **Quantités vendues** : $q(95) = 10$ unités seulement pour une recette de 950 — le modèle mise tout sur une clientèle minuscule et très riche.

— **Leçon méthodologique** : une étude mathématiquement correcte peut révéler que le **modèle** est mauvais, ce qui est un résultat en soi.

Réponse. R croît sans maximum (majorée par 1000) : le modèle de demande est irréaliste.

Correction de l'exercice 12 - Convexité d'un quotient

— **Dérivées** : $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ et

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}$$

— **Sur $]0; +\infty[$** : $f'(x) > 0$ — la fonction est **convexe** ✓

— **Sur $] -\infty; 0[$** : $f'(x) < 0$ — elle est **concave** ✓

— **Point d'inflexion** : f' change de signe en 0, mais 0 **n'appartient pas** au domaine — il n'y a donc **aucun** point d'inflexion ✓

— **Conséquence de la convexité sur $]0; +\infty[$** : la courbe est au-dessus de toutes ses tangentes.

— **Vérification en $x = 1$** : tangente $y = -x + 2$, et

$$\frac{1}{x} - (-x + 2) = \frac{1 - 2x + x^2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0 \quad \checkmark$$

— **Inégalité des cordes** : pour $0 < a < b$,

$$\frac{1}{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

- **Contrôle numérique** : $a = 1$, $b = 3$ donnent $\frac{1}{2} = 0,5$ à gauche et $\frac{1 + 1/3}{2} = \frac{2}{3} \approx 0,6667$ à droite ✓
 - **Nom de cette inégalité** : c'est la comparaison **moyenne harmonique** $\leq$ **moyenne arithmétique** ✓
 - **Contrôle** : la moyenne harmonique de 1 et 3 vaut $\frac{2}{1 + 1/3} = 1,5$, inférieure à la moyenne arithmétique 2 ✓
 - **Attention** : l'inégalité s'inverse sur $] - \infty ; 0[$, où la fonction est concave.
- Réponse.** $f'(x) = \frac{2}{x^3}$: convexe sur $]0 ; +\infty[$, concave sur $] - \infty ; 0[$, sans point d'inflexion.

Correction de l'exercice 13 - Modèle de dosage

- **Dérivée** : $R'(x) = 100(1 - 2x)$.
- **Annulation** : $x = 0,5$.
- **Signe** : positive avant, négative après — **maximum** ✓
- **Rendement maximal** :

$$R(0,5) = 100 \times 0,5 \times 0,5 = 25 \%$$
- **Plage au-dessus de 20 %** : $100x - 100x^2 > 20$ équivaut à $5x^2 - 5x + 1 < 0$.
- **Racines** : $\Delta = 25 - 20 = 5$, donc $x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}$, soit environ 0,27639 et 0,72361.
- **Plage** :

$$0,27639 < x < 0,72361$$
- **Largeur** : $\frac{2\sqrt{5}}{10} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,44721$ ✓
- **Contrôles** : $R(0,27639) = 100 \times 0,27639 \times 0,72361 \approx 20,000$ ✓ ; $R(0,3) = 21$ ✓ ; $R(0,2) = 16 < 20$ ✓
- **Concavité** : $R''(x) = -200 < 0$ — la fonction est **concave**, ce qui garantit que le maximum trouvé est **global** ✓
- **Symétrie** : $R(x) = R(1 - x)$, d'où la symétrie de la plage autour de 0,5 ✓
- **Lecture pratique** : la plage acceptable est large ($\pm 0,22$ autour de l'optimum), ce qui donne une bonne **tolérance** au dosage — un résultat rassurant pour l'exploitation industrielle.
- **Tolérance à 24 %** : $5x^2 - 5x + 1,2 < 0$ a pour discriminant $25 - 24 = 1$, donc $x \in]0,4 ; 0,6[$ — bien plus serré ✓

Réponse. Maximum 25 % en $x = 0,5$; rendement $> 20 \%$ pour $x \in]0,276 ; 0,724[$.

Correction de l'exercice 14 - Tangente et algorithme de Newton

- **Tangente en x_n** : $y = f(x_n)(x - x_n) + f(x_n) = 2x_n(x - x_n) + x_n^2 - 2$.
- **Intersection avec l'axe** : $0 = 2x_nx - 2x_n^2 + x_n^2 - 2$, donc $2x_nx = x_n^2 + 2$ et

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

- **Calculs** :

- $x_1 = \frac{1}{2} + 1 = 1,5$;
- $x_2 = 0,75 + \frac{1}{1,5} \approx 1,4166667$;
- $x_3 = 0,7083333 + \frac{1}{1,4166667} \approx 1,4142157$.
- **Valeur exacte** : $\sqrt{2} \approx 1,4142136$.
- **Erreurs** : 0,0858 ; 0,00245 ; $2,1 \times 10^{-6}$ ✓
- **Convergence quadratique** : le nombre de décimales correctes **double** à chaque étape ✓
- **Contrôle** : $x_3^2 \approx 2,0000060$, très proche de 2 ✓
- **Étape suivante** : $x_4 \approx 1,4142136$ — la précision machine est atteinte en **quatre** étapes.
- **Comparaison avec la dichotomie** : pour la même précision (10^{-6}), la dichotomie sur $[1 ; 2]$ demanderait 20 étapes ✓
- **Nom** : c'est la **méthode de Newton**, et cette formule particulière ($\frac{x}{2} + \frac{1}{x}$) était déjà connue des Babyloniens pour extraire des racines carrées.
- **Condition de succès** : il faut partir « assez près » et que f ne s'annule pas — avec $x_0 = 0$, la tangente serait horizontale et la méthode échouerait ✓

Réponse. $x_1 = 1,5$, $x_2 \approx 1,41667$, $x_3 \approx 1,4142157$ (méthode de Newton, convergence quadratique).

Correction de l'exercice 15 - Étude et interprétation

- **Réécriture** : $h(t) = 10 \left(1 - \frac{t}{60}\right)^{1/3}$.
- **Dérivée** :

$$h'(t) = 10 \times \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{60}\right) \left(1 - \frac{t}{60}\right)^{-2/3} = -\frac{1}{18} \left(1 - \frac{t}{60}\right)^{-2/3}$$
- **Signe** : toujours **négative** — la hauteur diminue ✓
- **Vitesse de descente** : $|h'(t)| = \frac{1}{18} \left(1 - \frac{t}{60}\right)^{-2/3}$, qui **croît** quand t croît (le terme entre parenthèses décroît vers 0, et l'exposant est négatif).
- **Conclusion** : la hauteur diminue **le plus vite à la fin**, quand $t \rightarrow 60$ — la vitesse tend même vers $+\infty$ ✓
- **Valeurs** : $|h'(0)| = \frac{1}{18} \approx 0,0556$ cm/s ; $|h'(30)| = \frac{1}{18} \times 0,5^{-2/3} \approx \frac{1,5874}{18} \approx 0,0882$ cm/s ; $|h'(59)| = \frac{1}{18} \times \left(\frac{1}{60}\right)^{-2/3} \approx \frac{15,326}{18} \approx 0,8515$ cm/s ✓
- **Hauteurs** : $h(0) = 10$ cm ; $h(30) = 10 \times 0,7937 \approx 7,937$ cm ; $h(59) = 10 \times 0,2554 \approx 2,554$ cm ; $h(60) = 0$ ✓
- **Interprétation physique** : le cône est **étroit en bas**, donc le même volume évacué fait baisser le niveau bien plus vite en fin de vidange ✓
- **Contrôle par la moitié du temps** : à $t = 30$ s, il reste 79 % de la hauteur mais seulement $0,7937^3 = 50$ % du volume ✓
- **Moitié de la hauteur** : $h(t) = 5$ donne $1 - \frac{t}{60} = 0,125$, soit $t = 52,5$ s — les 5 derniers centimètres partent en 7,5 s ✓

Réponse. La descente s'accélère continûment ; la vitesse est maximale à la fin ($t \rightarrow 60$ s).

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : conception d'un emballage

a) **Contrainte** : $x^2h = 500$, donc $h = \frac{500}{x^2}$.

— **Surfaces** : fond et couvercle $2x^2$; côtés $4xh = \frac{2000}{x}$.

— **Coût** :

$$C(x) = 0,02 \times 2x^2 + 0,01 \times \frac{2000}{x} = 0,04x^2 + \frac{20}{x} \quad \text{pour } x > 0$$

b) **Dérivée** :

$$C'(x) = 0,08x - \frac{20}{x^2} = \frac{0,08x^3 - 20}{x^2}$$

— **Racine** : $x^3 = \frac{20}{0,08} = 250$, donc $x = \sqrt[3]{250} \approx 6,2996$ cm.

— **Signe** : négative avant, positive après — **minimum** ✓

— **Hauteur** : $h = \frac{500}{39,685} \approx 12,599$ cm.

— **Propriété** : $h = 2x$ — la boîte optimale est **deux fois plus haute que large** ✓

— **Coût minimal** :

$$C(6,2996) = 0,04 \times 39,685 + \frac{20}{6,2996} \approx 1,5874 + 3,1748 \approx 4,7622 \text{ €}$$

— **Contrôles** : $C(6) = 1,44 + 3,3333 = 4,7733$ € et $C(7) = 1,96 + 2,8571 = 4,8171$ € — tous deux supérieurs ✓

— **Répartition du coût** : 1,59 € pour fond et couvercle, 3,17 € pour les côtés — soit exactement le **double**, une régularité de l'optimum ✓

c) **Convexité** :

$$C''(x) = 0,08 + \frac{40}{x^3} > 0 \quad \text{pour tout } x > 0$$

— **Conclusion** : C est **strictement convexe** sur $]0; +\infty[$, donc son unique point critique est un minimum **global** ✓

— **Contrôle** : $C''(6,2996) = 0,08 + \frac{40}{250} = 0,08 + 0,16 = 0,24 > 0$ ✓

— **Limites** : $C(x) \rightarrow +\infty$ en 0^+ (les côtés deviennent immenses) et en $+\infty$ (le fond devient immense) — cohérent avec une cuvette unique ✓

— **Comparaison avec un cube** : un cube de 500 cm^3 a un côté $\sqrt[3]{500} \approx 7,937$ cm, pour un coût de $0,04 \times 63 + \frac{20}{7,937} \approx 2,52 + 2,52 = 5,04$ € — soit 6 % de plus que l'optimum ✓

Réponse. a) $C(x) = 0,04x^2 + \frac{20}{x}$ · b) $x = \sqrt[3]{250} \approx 6,30$ cm, $h = 2x \approx 12,60$ cm, coût $\approx 4,76$ € · c) $C'' > 0$: minimum global.