Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : modélisation, optimisation et algorithmes

Dérivation et étude des fonctions — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Démarche d'optimisation.

1. Choisir la variable x et l'intervalle où elle a un sens. 2. Exprimer la grandeur à optimiser comme une fonction $f(x)$. 3. Dériver, étudier le signe de f' et dresser le tableau de variations. 4. Conclure par la valeur optimale **et** la valeur de x qui la réalise, puis contrôler sur des valeurs voisines.

Interprétations du nombre dérivé. Pente de la tangente ; vitesse instantanée $v(t) = x'(t)$; coût marginal $C'(q) \approx C(q+1) - C(q)$.

Dérivée de $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$: $a\,\mathrm{e}^{at}$.

Algorithmes.

- Balayage : on évalue f en des points régulièrement espacés et l'on garde le meilleur ; précision limitée par le pas.
- Dichotomie sur f' : on coupe en deux un intervalle où f' change de signe ; l'amplitude est divisée par 2 à chaque étape.
- Méthode de Newton : on remplace la courbe par sa tangente, qui coupe l'axe des abscisses en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Correction de l'exercice 1 – La boîte sans couvercle

a) La base est un carré de côté $30 - 2x$ et la hauteur vaut x, donc $V(x) = x(30-2x)^2$. Il faut $x > 0$ et $30 - 2x > 0$: $x \in]0\,;15[$.

b) On dérive le produit $u \times v$ avec $u = x$ et $v = (30-2x)^2$, dont la dérivée vaut $2 \times (-2)(30-2x) = -4(30-2x)$ (dérivée d'un carré). Alors

$$V'(x) = (30-2x)^2 - 4x(30-2x) = (30-2x)(30-2x-4x) = (30-2x)(30-6x)$$

Sur $]0\,;15[$, $30-2x>0$: V' a le signe de $30-6x$, positif avant 5 et négatif après. Le volume est maximal pour $x = 5$ cm, et vaut $V(5) = 5 \times 20^2 = 2\,000$ cm³, soit 2 litres. **Contrôle** : $V(4) = 4 \times 22^2 = 1\,936$ et $V(6) = 6 \times 18^2 = 1\,944$, tous deux inférieurs.

Réponse. a) $V(x) = x(30-2x)^2$ sur $]0\,;15[$; b) maximum 2 000 cm³ pour $x = 5$ cm.

Correction de l'exercice 2 – Coût marginal

a) On dérive terme à terme : $C'(q) = 0{,}3q^2 - 6q + 40$, d'où $C'(10) = 30 - 60 + 40 = 10$ €.

b) On calcule $C(10) = 100 - 300 + 400 + 100 = 300$ et $C(11) = 133{,}1 - 363 + 440 + 100 = 310{,}1$, donc

$$C(11) - C(10) = 10{,}1 \text{ €}$$

Le coût marginal $C'(10) = 10$ € est une très bonne approximation du coût du onzième objet : c'est l'approximation affine $C(10+1) \approx C(10) + C'(10) \times 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Le coût marginal $C'(q) = 0{,}3q^2 - 6q + 40$ est un trinôme de coefficient dominant positif ; sa dérivée $0{,}6q - 6$ s'annule en $q = 10$, négative avant et positive après. Le coût marginal est donc minimal pour $q = 10$ objets, où il vaut 10 € : au-delà, chaque objet supplémentaire coûte de plus en plus cher à produire.

Réponse. a) $C'(q) = 0{,}3q^2 - 6q + 40$, $C'(10) = 10$ € ; b) $C(11) - C(10) = 10{,}1$ € ; c) minimal pour $q = 10$.

Correction de l'exercice 3 – Fixer un prix de vente

a) La recette est le prix multiplié par la quantité vendue :
$R(p) = p(200 - 2p) = 200p - 2p^2$. Le bénéfice retire le coût de production, 20 € par article vendu :

$$B(p) = (p - 20)(200 - 2p) = -2p^2 + 240p - 4\,000$$

b) $R'(p) = 200 - 4p$ s'annule en $p = 50$, positive avant et négative après : la recette est maximale pour $p = 50$ €, avec $R(50) = 50 \times 100 = 5\,000$ €.

$B'(p) = -4p + 240$ s'annule en $p = 60$, positive avant et négative après : le bénéfice est maximal pour $p = 60$ €, avec $B(60) = 40 \times 80 = 3\,200$ €.

Le prix qui rapporte le plus de bénéfice est plus élevé que celui qui rapporte la plus grande recette : vendre moins d'articles, mais avec une marge plus grande, permet d'économiser sur les coûts de production.

Réponse. $R(p) = 200p - 2p^2$, maximale à $p = 50$ € ; $B(p) = (p - 20)(200 - 2p)$, maximal à $p = 60$ € (3 200 €).

Correction de l'exercice 4 – Algorithme de recherche d'un maximum

a) Le pas vaut $h = \dfrac{4}{8} = 0{,}5$. Le programme évalue f en 0 ; 0,5 ; … ; 4 et obtient 0 ; 1,75 ; 3 ; 3,75 ; 4 ; 3,75 ; 3 ; 1,75 ; 0. La plus grande valeur est 4, atteinte en 2 : il affiche 2 et 4.
Vérification : $f'(x) = 4 - 2x$ s'annule en 2, positive avant et négative après, et

$$f(2) = 8 - 4 = 4$$

Le balayage tombe exactement sur le maximum parce que 2 est un multiple du pas.

b) Avec $n = 7$, le pas vaut $\dfrac{4}{7} \approx 0{,}571$. Les deux points les plus proches de 2 sont $\dfrac{12}{7} \approx 1{,}714$ et $\dfrac{16}{7} \approx 2{,}286$, où f prend la même valeur $\dfrac{192}{49} \approx 3{,}918$. L'inégalité stricte garde le premier rencontré : le programme affiche environ 1,714 et 3,918. Le balayage ne donne plus qu'une approximation du maximum, d'autant moins bonne que le pas est grand.

Réponse. a) 2 et 4 ; b) environ 1,714 et 3,918 : simple approximation.

Correction de l'exercice 5 – Dichotomie sur la dérivée

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$, avec $f'(1) = -2 < 0$ et $f'(2) = 1 > 0$: la dérivée change de signe sur $[1\,;2]$, où f passe de décroissante à croissante.

b) À chaque étape, on calcule f' au milieu et l'on garde la moitié où f' change de signe. $f'(1{,}5) = -1{,}25 < 0$: on garde $[1{,}5\,;2]$. $f'(1{,}75) = -0{,}3125 < 0$: on garde $[1{,}75\,;2]$. $f'(1{,}875) \approx 0{,}297 > 0$: on garde $[1{,}75\,;1{,}875]$. $f'(1{,}8125) \approx -0{,}0195 < 0$: on garde $[1{,}8125\,;1{,}875]$. Le minimum local est atteint en un x tel que

$$1{,}8125 < x < 1{,}875$$

c) Le discriminant de $3x^2 - 6x + 1$ vaut 24 ; la racine dans $[1\,;2]$ est $1 + \dfrac{\sqrt{6}}{3} \approx 1{,}8165$, bien

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

dans l'encadrement. Le minimum local vaut environ $f(1{,}8165) \approx -0{,}0887$. Quatre étapes ont divisé l'amplitude par $2^4 = 16$.

Réponse. $1{,}8125 < x_{\min} < 1{,}875$; valeur exacte $1 + \dfrac{\sqrt{6}}{3} \approx 1{,}8165$.

Correction de l'exercice 6 – Méthode de Newton

a) La tangente en x_n a pour équation $y = 2x_n(x - x_n) + x_n^2 - 2$. Elle coupe l'axe des abscisses quand $y = 0$:

$$2x_n x = 2x_n^2 - x_n^2 + 2 = x_n^2 + 2 \Leftrightarrow x = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

b) $x_1 = 0{,}5 + 1 = 1{,}5$; $x_2 = 0{,}75 + \dfrac{1}{1{,}5} \approx 1{,}416\,667$;
$x_3 \approx 0{,}708\,333 + 0{,}705\,882 \approx 1{,}414\,216$. Comme $\sqrt{2} \approx 1{,}414\,214$, les erreurs valent environ 0,086, puis 0,0025, puis 0,000 002 : le nombre de décimales exactes double à peu près à chaque étape. La dichotomie aurait demandé une vingtaine d'étapes pour la même précision. Cette méthode suppose que la tangente ne soit jamais horizontale : avec $x_0 = 0$, elle échouerait.

Réponse. $x_1 = 1{,}5$, $x_2 \approx 1{,}41667$, $x_3 \approx 1{,}414216$ (contre $\sqrt{2} \approx 1{,}414214$).

Correction de l'exercice 7 – Les pentes des sécantes

a) Pour chaque pas h de la liste, on calcule le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$, c'est-à-dire la pente de la sécante passant par les points d'abscisses 1 et $1 + h$. On obtient 3 ; 2,1 ; 2,01 ; 2,001 (aux arrondis des flottants près).

b) Pour $h \neq 0$:

$$\frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h$$

Quand h se rapproche de 0, la pente des sécantes se rapproche de 2. C'est le nombre dérivé $f'(1) = 2 \times 1 = 2$, pente de la tangente en 1 : la tangente apparaît comme la position limite des sécantes. On pourrait aussi prendre des pas négatifs ($h = -0{,}1$ donne 1,9) pour approcher 2 par valeurs inférieures.

Réponse. a) 3 ; 2,1 ; 2,01 ; 2,001 ; b) pente $2 + h$, qui se rapproche de $f'(1) = 2$.

Correction de l'exercice 8 – Une inégalité par l'étude d'une fonction

Par les variations. $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$. Sur $[0\,;+\infty[$, $x + 1 > 0$, donc $g'(x)$ a le signe de $x - 1$: g décroît sur $[0\,;1]$ et croît sur $[1\,;+\infty[$. Son minimum vaut $g(1) = 1 - 3 + 2 = 0$. Donc $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, c'est-à-dire $x^3 \geq 3x - 2$.

Par la factorisation. On développe :
$(x-1)^2(x+2) = \left(x^2 - 2x + 1\right)(x+2) = x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 = x^3 - 3x + 2$. Pour $x \geq 0$, $(x-1)^2 \geq 0$ et $x + 2 > 0$:

$$g(x) = (x-1)^2(x+2) \geq 0$$

Les deux méthodes concordent, et l'égalité n'a lieu qu'en $x = 1$: la droite $y = 3x - 2$ est la tangente à la courbe de $x \mapsto x^3$ en 1, et la courbe est au-dessus sur $[0\,;+\infty[$.

Réponse. Minimum de g égal à 0 en 1 ; $g(x) = (x-1)^2(x+2) \geq 0$; égalité en $x = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 9 – Le point d’une parabole le plus proche

a) Par la formule de la distance en repère orthonormé :
$AM^2 = (x-0)^2 + \left(x^2-2\right)^2 = x^2 + x^4 - 4x^2 + 4 = x^4 - 3x^2 + 4$.

b) $d'(x) = 4x^3 - 6x = 2x\left(2x^2-3\right)$, qui s’annule en 0 et en $\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. Un tableau de signes montre que d décroît sur $\left]-\infty\,;-\sqrt{1{,}5}\right]$, croît sur $\left[-\sqrt{1{,}5}\,;0\right]$, décroît sur $\left[0\,;\sqrt{1{,}5}\right]$ et croît ensuite. Le minimum est atteint pour $x^2 = \dfrac{3}{2}$:

$$d = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4 = \frac{7}{4}$$

La distance minimale vaut $AM = \sqrt{\dfrac{7}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2} \approx 1{,}323$, atteinte aux deux points $\left(\pm\sqrt{1{,}5}\,;1{,}5\right)$. Le sommet de la parabole, $(0\,;0)$, est à distance 2 de A : ce n’est pas le point le plus proche. On minimise AM^2 plutôt que AM pour éviter une racine carrée ; les deux sont minimaux au même endroit.

Réponse. a) $d(x) = x^4 - 3x^2 + 4$; b) distance minimale $\dfrac{\sqrt{7}}{2} \approx 1{,}323$, aux points d’abscisses $\pm\sqrt{1{,}5}$.

Correction de l’exercice 10 – Un mobile qui fait demi-tour

a) $v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3\left(t^2 - 4t + 3\right) = 3(t-1)(t-3)$. Elle est positive sur $[0\,;1[$ et sur $]3\,;5]$, négative sur $]1\,;3[$.

b) Le mobile change de sens quand sa vitesse s’annule en changeant de signe : à $t = 1$ s et à $t = 3$ s. On calcule

$$x(1) = 1 - 6 + 9 = 4 \qquad x(3) = 27 - 54 + 27 = 0$$

Il avance jusqu’à la position 4 m, recule jusqu’à 0 m, puis avance de nouveau.

c) $x(0) = 0$ et $x(5) = 125 - 150 + 45 = 20$. Le mobile parcourt 4 m de $t = 0$ à $t = 1$, puis 4 m en reculant, puis 20 m de $t = 3$ à $t = 5$: au total $4 + 4 + 20 = 28$ m. La distance parcourue n’est pas la différence $x(5) - x(0) = 20$ m, car le mobile a fait des allers-retours.

Réponse. a) $v(t) = 3(t-1)(t-3)$; b) demi-tours à $t = 1$ s (en 4 m) et $t = 3$ s (en 0 m) ; c) 28 m.

Correction de l’exercice 11 – La canette la plus économique

a) Le volume vaut $\pi r^2 h = 330$, donc $h = \dfrac{330}{\pi r^2}$. L’aire comprend deux disques et la surface latérale : $S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \times \dfrac{330}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \dfrac{660}{r}$.

b) $S'(r) = 4\pi r - \dfrac{660}{r^2} = \dfrac{4\pi r^3 - 660}{r^2}$. Le dénominateur est positif ; le numérateur est négatif tant que $r^3 < \dfrac{660}{4\pi} = \dfrac{165}{\pi}$ et positif ensuite, car $r \mapsto r^3$ est croissante. L’aire décroît puis croît : elle est minimale pour $r^3 = \dfrac{165}{\pi} \approx 52{,}52$.

c) Par essais : $3{,}74^3 \approx 52{,}31$ et $3{,}75^3 \approx 52{,}73$, donc $r \approx 3{,}74$ cm (plus précisément $r \approx 3{,}745$). Alors

$$h = \frac{330}{\pi r^2} \approx 7{,}49 \text{ cm}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

On a $h \approx 2r$: la canette la plus économique est aussi haute que large. Les canettes réelles sont plus hautes, pour des raisons de prise en main et d'empilement.

Réponse. a) $h = \dfrac{330}{\pi r^2}$; b) minimum pour $r^3 = \dfrac{165}{\pi}$; c) $r \approx 3{,}74$ cm, $h \approx 7{,}49$ cm $\approx 2r$.

Correction de l'exercice 12 – Quand une population croît-elle le plus vite ?

a) $P'(t) = -3t^2 + 24t = 3t(8 - t)$. Sur $[0\,;8]$, $t \geq 0$ et $8 - t \geq 0$: $P'(t) \geq 0$ et la population augmente.

b) On étudie la fonction $g(t) = P'(t) = -3t^2 + 24t$. Sa dérivée vaut $g'(t) = -6t + 24$, positive pour $t < 4$ et négative pour $t > 4$: g est maximale en $t = 4$. La vitesse d'accroissement la plus grande vaut

$$P'(4) = -48 + 96 = 48 \text{ milliers de bactéries par heure}$$

À cet instant, la population vaut $P(4) = -64 + 192 + 100 = 228$ milliers. Avant 4 h, la croissance s'accélère ; après, elle ralentit tout en continuant.

c) Pour $t > 8$, $P'(t) < 0$: la population diminue. Elle atteint son maximum $P(8) = -512 + 768 + 100 = 356$ milliers à $t = 8$, puis décroît jusqu'à $P(10) = 300$ milliers, par exemple parce que les ressources s'épuisent.

Réponse. a) $P'(t) = 3t(8 - t) \geq 0$ sur $[0\,;8]$; b) à $t = 4$ h, 48 milliers par heure ; c) la population diminue après son maximum de 356 milliers.

Correction de l'exercice 13 – Concentration d'un médicament

a) On dérive le produit $u \times v$ avec $u = 20t$, $u' = 20$, et $v = \mathrm{e}^{-0{,}5t}$, $v' = -0{,}5\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$ (dérivée de $t \mapsto \mathrm{e}^{at}$ avec $a = -0{,}5$). Alors

$$c'(t) = 20\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} - 10t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t} = 20\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}(1 - 0{,}5t)$$

b) L'exponentielle est strictement positive : $c'(t)$ a le signe de $1 - 0{,}5t$, positif pour $t < 2$ et négatif pour $t > 2$. La concentration est maximale à $t = 2$ h, et vaut $c(2) = 40\,\mathrm{e}^{-1} = \dfrac{40}{\mathrm{e}} \approx 14{,}7$ mg/L.

c) $c(1) = 20\,\mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 12{,}1$ mg/L : le médicament est efficace. $c(4) = 80\,\mathrm{e}^{-2} \approx 10{,}8$ mg/L : il l'est encore, de peu. Comme c décroît après 2 h, la concentration passera bientôt sous 10 mg/L, ce qui justifie une nouvelle prise quelques heures plus tard.

Réponse. b) Maximum $\dfrac{40}{\mathrm{e}} \approx 14{,}7$ mg/L à $t = 2$ h ; c) oui ($\approx 12{,}1$ mg/L) et oui ($\approx 10{,}8$ mg/L).

Correction de l'exercice 14 – Rectangle sous une parabole

a) Le rectangle a pour largeur $2x$ et pour hauteur $9 - x^2$:

$$A(x) = 2x\left(9 - x^2\right) = 18x - 2x^3$$

b) $A'(x) = 18 - 6x^2 = 6\left(3 - x^2\right)$. Sur $[0\,;3]$, elle est positive pour $x < \sqrt{3}$ et négative pour $x > \sqrt{3}$: l'aire croît puis décroît, et elle est maximale pour $x = \sqrt{3} \approx 1{,}732$.

L'aire maximale vaut $A\left(\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}\,(9 - 3) = 12\sqrt{3} \approx 20{,}78$. Le rectangle optimal mesure $2\sqrt{3} \approx 3{,}46$ de large et 6 de haut. **Contrôle** : $A(1) = 16$ et $A(2) = 20$ sont bien inférieurs à 20,78, et l'aire est nulle aux bornes 0 et 3.

Réponse. a) $A(x) = 18x - 2x^3$; b) maximum $12\sqrt{3} \approx 20{,}78$ pour $x = \sqrt{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : coût, bénéfice et rentabilité

a) $C'(q) = 3q^2 - 24q + 60$. Sa dérivée $6q - 24$ s’annule en $q = 4$, négative avant et positive après : le coût marginal est minimal pour 4 centaines d’objets, où il vaut $C'(4) = 48 - 96 + 60 = 12$.

b) $B(q) = 36q - C(q) = 36q - q^3 + 12q^2 - 60q = -q^3 + 12q^2 - 24q$, d’où $B'(q) = -3q^2 + 24q - 24 = -3\left(q^2 - 8q + 8\right)$.

c) Le trinôme $q^2 - 8q + 8$ a pour discriminant 32 et pour racines $4 \pm 2\sqrt{2}$, soit environ 1,17 et 6,83. B' est négative à l’extérieur de ces racines et positive entre elles : B décroît, croît, puis décroît. Le maximum est atteint en $q = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6{,}83$, avec

$$B\left(4 + 2\sqrt{2}\right) \approx 77{,}25$$

soit environ 7 725 € de bénéfice par jour (on vérifie que $B(10) = -40 < 77{,}25$).

d) En factorisant par $-q$: $-q\left(q^2 - 12q + 24\right) = -q^3 + 12q^2 - 24q$. Le trinôme a pour racines $6 \pm 2\sqrt{3}$, soit environ 2,54 et 9,46, et il est négatif entre elles. Pour $q > 0$, $B(q) > 0$ quand $q^2 - 12q + 24 < 0$: l’entreprise est bénéficiaire pour une production comprise entre environ 254 et 946 objets par jour.

e) On garde la meilleure valeur rencontrée :

```
def B(q):
    return -q**3 + 12*q**2 - 24*q

meilleur = 0
for k in range(1001):
    q = k / 100
    if B(q) > B(meilleur):
        meilleur = q
print(meilleur, B(meilleur))
```

Il affiche 6,83 et environ 77,25, en accord avec c).

Réponse. a) Minimal pour $q = 4$; c) maximum $\approx 77{,}25$ pour $q = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6{,}83$; d) bénéficiaire pour $6 - 2\sqrt{3} < q < 6 + 2\sqrt{3}$ (environ 2,54 à 9,46) ; e) balayage : 6,83.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).