Plaquette 3 – Tangentes, approximations affines et positions relatives

Dérivation et étude des fonctions — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Tangente à la courbe de f au point d'abscisse a :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Sa pente est $f'(a)$; elle est horizontale lorsque $f'(a) = 0$, parallèle à la droite $y = mx + p$ lorsque $f'(a) = m$.

Approximation affine. Pour h proche de 0 :

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)\,h$$

Exemples en $a = 1$: $(1 + h)^2 \approx 1 + 2h$, $\dfrac{1}{1 + h} \approx 1 - h$, $\sqrt{1 + h} \approx 1 + \dfrac{h}{2}$.

Position relative de deux courbes C_f et C_g : on étudie le signe de $d(x) = f(x) - g(x)$. Si $d(x) \geq 0$, C_f est au-dessus de C_g ; les solutions de $d(x) = 0$ sont les abscisses des points communs. Pour une tangente en a, $d(a) = 0$ et le facteur $(x - a)^2$ apparaît souvent.

Tangente passant par un point P : on écrit la tangente en un point d'abscisse a inconnue, puis on traduit qu'elle passe par P ; on obtient une équation d'inconnue a.

Correction de l'exercice 1 – Équation de tangente et position

On calcule $f(3) = 9 - 12 + 1 = -2$, puis $f'(x) = 2x - 4$ et $f'(3) = 2$. La tangente a pour équation

$$y = 2(x - 3) + (-2) = 2x - 8$$

Contrôle : pour $x = 3$, on retrouve $2 \times 3 - 8 = -2 = f(3)$.

Pour la position, on étudie la différence entre la courbe et la tangente :

$$f(x) - (2x - 8) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

Un carré est positif ou nul, et ne s'annule qu'en $x = 3$. La courbe est donc au-dessus de sa tangente, qu'elle touche uniquement au point de contact $(3\,;-2)$.

Réponse. T : $y = 2x - 8$; $f(x) - (2x - 8) = (x - 3)^2 \geq 0$: la courbe est au-dessus de T.

Correction de l'exercice 2 – Approximation affine

Racine carrée. Avec $f(x) = \sqrt{x}$, $f(16) = 4$ et $f'(16) = \dfrac{1}{2\sqrt{16}} = 0{,}125$. Pour $h = 0{,}3$:

$$\sqrt{16{,}3} \approx 4 + 0{,}125 \times 0{,}3 = 4{,}0375$$

La calculatrice donne $\sqrt{16{,}3} \approx 4{,}037\,33$: l'erreur est d'environ $1{,}7 \times 10^{-4}$.

Inverse. Avec $g(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(2) = 0{,}5$ et $g'(2) = -\dfrac{1}{4}$. Pour $h = 0{,}02$:

$$\frac{1}{2{,}02} \approx 0{,}5 - 0{,}25 \times 0{,}02 = 0{,}495$$

La valeur exacte est $0{,}495\,05$ à 10^{-5} près, soit une erreur d'environ 5×10^{-5}. Dans les

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

deux cas, l'approximation est excellente parce que h est petit devant a.

Réponse. $\sqrt{16{,}3} \approx 4{,}0375$ (calculatrice : 4,03733) ; $\dfrac{1}{2{,}02} \approx 0{,}495$ (calculatrice : 0,49505).

Correction de l'exercice 3 – Tangentes horizontales

Une tangente est horizontale quand sa pente $f'(x)$ est nulle. On calcule

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x\left(x^2 - 4\right) = 4x(x-2)(x+2)$$

qui s'annule en -2, 0 et 2. On calcule $f(0) = 3$ et $f(2) = f(-2) = 16 - 32 + 3 = -13$. Les tangentes horizontales sont donc la droite $y = 3$ (au point d'abscisse 0) et la droite $y = -13$, qui touche la courbe en deux points, d'abscisses -2 et 2.

Pour la position, on calcule $f(x) + 13 = x^4 - 8x^2 + 16 = \left(x^2 - 4\right)^2 \geq 0$. La courbe est donc toujours au-dessus de la droite $y = -13$, et -13 est le minimum de f, atteint en ± 2. La fonction est paire, ce qui explique la symétrie des deux points de contact.

Réponse. $y = 3$ (en $x = 0$) et $y = -13$ (en $x = \pm 2$) ; $f(x) + 13 = \left(x^2 - 4\right)^2 \geq 0$.

Correction de l'exercice 4 – Tangente parallèle à une droite

Deux droites sont parallèles quand elles ont la même pente : on cherche les x tels que $f'(x) = 9$. Comme $f'(x) = 3x^2 - 3$, on résout $3x^2 - 3 = 9$, soit $x^2 = 4$: $x = 2$ ou $x = -2$.

On a $f(2) = 8 - 6 = 2$ et $f(-2) = -2$; les points cherchés sont $A(2\,;2)$ et $B(-2\,;-2)$. Les tangentes ont pour équations

$$y = 9(x-2) + 2 = 9x - 16 \qquad \text{et} \qquad y = 9(x+2) - 2 = 9x + 16$$

Contrôle : $9 \times 2 - 16 = 2$ et $9 \times (-2) + 16 = -2$. Les deux points sont symétriques par rapport à l'origine, ce qui s'explique par l'imparité de f : $f(-x) = -f(x)$. La droite D elle-même n'est pas tangente à la courbe, puisque son ordonnée à l'origine, 2, n'est ni -16 ni 16.

Réponse. $A(2\,;2)$ et $B(-2\,;-2)$; tangentes $y = 9x - 16$ et $y = 9x + 16$.

Correction de l'exercice 5 – Tangente à la courbe d'un quotient

On a $f(0) = -1$. Avec $u = 2x - 1$ et $v = x + 1$:

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

donc $f'(0) = 3$ et la tangente a pour équation $y = 3(x - 0) - 1 = 3x - 1$.

Pour la position, on réduit au même dénominateur :

$$f(x) - (3x-1) = \frac{2x - 1 - (3x-1)(x+1)}{x+1} = \frac{2x - 1 - 3x^2 - 2x + 1}{x+1} = \frac{-3x^2}{x+1}$$

Sur $]-1\,;+\infty[$, $x + 1 > 0$ et $-3x^2 \leq 0$: la différence est négative ou nulle. La courbe est en dessous de sa tangente, qu'elle touche seulement en $(0\,;-1)$. **Contrôle** : $f(1) = 0{,}5$ est bien inférieur à $3 \times 1 - 1 = 2$.

Réponse. T:$y = 3x - 1$; la différence vaut $\dfrac{-3x^2}{x+1} \leq 0$: la courbe est sous T.

Correction de l'exercice 6 – Tangentes passant par l'origine

On écrit la tangente au point d'abscisse a, avec $f(a) = a^2 + 2a + 4$ et $f'(a) = 2a + 2$:

$$y = (2a+2)(x-a) + a^2 + 2a + 4 = (2a+2)x - a^2 + 4$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Elle passe par l'origine si, pour $x = 0$, on obtient $y = 0$: $-a^2 + 4 = 0$, soit $a = 2$ ou $a = -2$.

Pour $a = 2$, la pente vaut 6 et la tangente est $y = 6x$, avec le point de contact $(2\,;12)$. Pour $a = -2$, la pente vaut -2 et la tangente est $y = -2x$, avec le point de contact $(-2\,;4)$. **Contrôle** : $6 \times 2 = 12$ et $-2 \times (-2) = 4$. On peut aussi vérifier la tangence par $f(x) - 6x = (x-2)^2$ et $f(x) + 2x = (x+2)^2$.

Réponse. $y = 6x$ (contact en $(2\,;12)$) et $y = -2x$ (contact en $(-2\,;4)$).

Correction de l'exercice 7 – Approximations près de 1

a) On applique $f(1+h) \approx f(1) + f'(1)\,h$. Pour le carré, $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$; pour l'inverse, $f(1) = 1$ et $f'(1) = -1$; pour la racine carrée, $f(1) = 1$ et $f'(1) = \frac{1}{2}$. D'où

$$(1+h)^2 \approx 1 + 2h \qquad \frac{1}{1+h} \approx 1 - h \qquad \sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$$

b) Pour $h = 0{,}1$: $1{,}1^2 = 1{,}21$ contre $1{,}2$; $\frac{1}{1{,}1} \approx 0{,}909$ contre $0{,}9$; $\sqrt{1{,}1} \approx 1{,}0488$ contre $1{,}05$. Pour $h = 0{,}01$: $1{,}01^2 = 1{,}0201$ contre $1{,}02$; $\frac{1}{1{,}01} \approx 0{,}990\,10$ contre $0{,}99$; $\sqrt{1{,}01} \approx 1{,}004\,99$ contre $1{,}005$.

Quand h est divisé par 10, l'erreur est divisée par environ 100 : pour le carré, elle vaut exactement h^2, puisque $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$.

Réponse. a) $1 + 2h$, $1 - h$, $1 + \frac{h}{2}$; b) erreurs de l'ordre de 10^{-2} pour $h = 0{,}1$, de 10^{-4} pour $h = 0{,}01$.

Correction de l'exercice 8 – Approximation d'un calcul

Avec $f(x) = x^3$, $f(3) = 27$ et $f'(3) = 3 \times 9 = 27$. Pour $h = -0{,}02$:

$$2{,}98^3 \approx 27 + 27 \times (-0{,}02) = 26{,}46$$

La valeur exacte est $2{,}98^3 = 26{,}463\,592$ (on calcule $2{,}98^2 = 8{,}8804$, puis on multiplie par $2{,}98$). L'erreur vaut environ $0{,}0036$.

Pour $h = -0{,}2$: $2{,}8^3 \approx 27 - 27 \times 0{,}2 = 21{,}6$, alors que $2{,}8^3 = 21{,}952$; l'erreur atteint $0{,}352$. Avec un écart dix fois plus grand, l'erreur est environ cent fois plus grande : l'approximation affine n'est fiable que tout près du point de contact.

Réponse. $2{,}98^3 \approx 26{,}46$ (exact $26{,}4636$) ; $2{,}8^3 \approx 21{,}6$ (exact $21{,}952$) : l'approximation se dégrade vite quand h grandit.

Correction de l'exercice 9 – Position relative de deux courbes

On étudie le signe de $d(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 4x + 3$. En développant, $(x-1)\left(x^2 + x - 3\right) = x^3 + x^2 - 3x - x^2 - x + 3 = x^3 - 4x + 3$: la factorisation est juste.

Le trinôme $x^2 + x - 3$ a pour discriminant 13 et pour racines $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \approx -2{,}303$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \approx 1{,}303$. Il est positif à l'extérieur de ces racines. En combinant avec le signe de $x - 1$:

x	$]-\infty\,;x_1[$	$]x_1\,;1[$	$]1\,;x_2[$	$]x_2\,;+\infty[$
$d(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

La courbe de f est au-dessus de la droite sur $]x_1\,;1[$ et sur $]x_2\,;+\infty[$, en dessous ailleurs ;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

elles se coupent en trois points, d'abscisses x_1, 1 et x_2. **Contrôles** : $d(0) = 3 > 0$ et $d(1{,}2) = -0{,}072 < 0$.

Réponse. $d(x) = (x-1)\left(x^2+x-3\right)$: trois points communs ($x \approx -2{,}303$, 1, $\approx 1{,}303$) ; f au-dessus sur $]x_1\,;1[$ et $]x_2\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 10 – Tangente à une hyperbole

On a $f(-1) = -2$, et $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2}$, donc $f'(-1) = -2$. La tangente a pour équation $y = -2(x+1) - 2 = -2x - 4$.

On étudie la différence, sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$f(x) - (-2x-4) = \frac{2 + 2x^2 + 4x}{x} = \frac{2(x+1)^2}{x}$$

Le numérateur est positif ou nul ; la différence a donc le signe de x. Sur $]-\infty\,;0[$, la courbe est en dessous de la tangente (elle la touche en -1) ; sur $]0\,;+\infty[$, elle est au-dessus. **Contrôles** : $f(-2) = -1$ est sous $-2\times(-2) - 4 = 0$, et $f(1) = 2$ est au-dessus de -6.

Réponse. $y = -2x - 4$; la différence $\dfrac{2(x+1)^2}{x}$ a le signe de x.

Correction de l'exercice 11 – Deux courbes tangentes

Les points communs vérifient $x^2 = -x^2 + 4x - 2$, soit $2x^2 - 4x + 2 = 0$, c'est-à-dire

$$(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Les courbes ont un seul point commun, $(1\,;1)$. Les pentes des tangentes y valent $f'(1) = 2$ et $g'(1) = -2 + 4 = 2$: elles sont égales, les deux courbes ont donc la même tangente en ce point, $y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$.

Pour les positions : $f(x) - (2x-1) = (x-1)^2 \geq 0$, la courbe de f est au-dessus de la tangente ; $g(x) - (2x-1) = -x^2 + 2x - 1 = -(x-1)^2 \leq 0$, la courbe de g est en dessous. Les deux paraboles se touchent de part et d'autre de la droite. La racine double de l'équation $f(x) = g(x)$ est la traduction algébrique de ce contact.

Réponse. Oui, en $(1\,;1)$, avec la tangente commune $y = 2x - 1$; f au-dessus, g en dessous.

Correction de l'exercice 12 – Tangentes à l'hyperbole et aire d'un triangle

a) On a $f(a) = \dfrac{1}{a}$ et $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$. La tangente a pour équation

$$y = -\frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{2}{a}$$

b) Pour $x = 0$, $y = \dfrac{2}{a}$: la tangente coupe l'axe des ordonnées en $\left(0\,;\dfrac{2}{a}\right)$. Pour $y = 0$, $\dfrac{x}{a^2} = \dfrac{2}{a}$, soit $x = 2a$: elle coupe l'axe des abscisses en $(2a\,;0)$.

c) Le triangle est rectangle en l'origine, de côtés $2a$ et $\dfrac{2}{a}$. Son aire vaut $\dfrac{1}{2}\times 2a \times \dfrac{2}{a} = 2$, quel que soit a. Par exemple, pour $a = 1$, la tangente $y = -x + 2$ coupe les axes en $(2\,;0)$ et $(0\,;2)$, et l'aire vaut bien 2. On remarque aussi que le point de contact $\left(a\,;\dfrac{1}{a}\right)$ est le milieu du segment découpé par les axes.

Réponse. a) $y = -\dfrac{x}{a^2} + \dfrac{2}{a}$; b) $(2a\,;0)$ et $\left(0\,;\dfrac{2}{a}\right)$; c) aire = 2 pour tout a.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 13 – Vitesse moyenne et vitesse instantanée

a) La vitesse moyenne est le taux de variation $\dfrac{d(2+h)-d(2)}{h}$. On trouve 24,5 m/s pour $h=1$, 20,09 m/s pour $h=0{,}1$ et 19,649 m/s pour $h=0{,}01$.

b) On développe : $d(2+h)-d(2)=4{,}9\left(4+4h+h^2\right)-19{,}6=19{,}6h+4{,}9h^2$. Pour $h\neq 0$,

$$\frac{d(2+h)-d(2)}{h}=19{,}6+4{,}9h$$

Quand h se rapproche de 0, ce taux se rapproche de 19,6 : la vitesse instantanée à $t=2$ est de 19,6 m/s.

c) $d'(t)=9{,}8t$, donc $d'(2)=19{,}6$: c’est le nombre dérivé, interprété comme une vitesse instantanée. Au voisinage de 2, $d(2+h)\approx d(2)+d'(2)\,h=19{,}6+19{,}6h$, soit $d(t)\approx 19{,}6t-19{,}6$.

Réponse. a) 24,5 ; 20,09 ; 19,649 m/s ; b) vitesse instantanée 19,6 m/s ; c) $d'(2)=19{,}6$; $d(t)\approx 19{,}6t-19{,}6$ près de 2.

Correction de l’exercice 14 – Recherche d’un point de contact

Par la dérivée. La tangente a pour pente 4 là où $f'(x)=2x=4$, c’est-à-dire en $x=2$, au point $(2\,;6)$. La droite $y=4x+k$ passe par ce point si $6=8+k$, soit $k=-2$.

Par une équation. Les points communs vérifient $x^2+2=4x+k$, soit $x^2-4x+2-k=0$, de discriminant

$$\Delta=16-4(2-k)=8+4k$$

Pour $k=-2$, $\Delta=0$: l’équation devient $(x-2)^2=0$ et la droite touche la courbe en un seul point, $(2\,;6)$, ce qui confirme la tangence.

Pour $k>-2$, $\Delta>0$: la droite coupe la parabole en deux points. Pour $k<-2$, $\Delta<0$: aucun point commun, la droite passe sous la parabole. **Contrôle** : $f(x)-(4x-2)=(x-2)^2\geq 0$.

Réponse. $k=-2$, contact en $(2\,;6)$; deux points communs si $k>-2$, aucun si $k<-2$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : étude locale et globale

a) Avec $u=x^2-2x$ et $v=x+1$, le numérateur de la dérivée vaut $(2x-2)(x+1)-\left(x^2-2x\right)=2x^2-2-x^2+2x=x^2+2x-2$. Ce trinôme a pour racines $-1\pm\sqrt{3}$; seule $x_0=-1+\sqrt{3}\approx 0{,}732$ est dans l’intervalle. La dérivée est négative sur $]-1\,;x_0[$ et positive sur $]x_0\,;+\infty[$: f décroît puis croît. Avec $x_0+1=\sqrt{3}$ et $x_0^2=4-2\sqrt{3}$, le minimum vaut

$$f(x_0)=\frac{4-2\sqrt{3}+2-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{6-4\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}-4\approx -0{,}536$$

b) $f(0)=0$ et $f'(0)=-2$: la tangente est $y=-2x$.

c) On calcule $f(x)-(-2x)=\dfrac{x^2-2x+2x^2+2x}{x+1}=\dfrac{3x^2}{x+1}$. Sur $]-1\,;+\infty[$, le dénominateur est positif : la différence est positive ou nulle, et ne s’annule qu’en 0. La courbe est au-dessus de sa tangente.

d) C’est exactement la traduction de c) : $f(x)+2x\geq 0$ pour tout $x>-1$. **Contrôle** : pour $x=1$, $f(1)=-0{,}5\geq -2$.

Réponse. a) Minimum $2\sqrt{3}-4\approx -0{,}536$ en $\sqrt{3}-1$; b) $y=-2x$; c) $f(x)+2x=\dfrac{3x^2}{x+1}\geq 0$;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) découle de c).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).