

## Plaquette 3 - Tangentes, approximations affines et positions relatives

### Dérivation et étude des fonctions — Première spé maths

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

**Équation de la tangente** au point d'abscisse  $a$  :

$$y = f(a)(x - a) + f(a)$$

**Approximation affine.** Pour  $h$  petit :

$$f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$$

L'erreur est de l'ordre de  $h^2$  : diviser  $h$  par 10 divise l'erreur par 100.

**Position relative courbe / tangente.** On étudie le signe de

$$d(x) = f(x) - [f(a)(x - a) + f(a)]$$

- $d(x) \geq 0$  : la courbe est **au-dessus** de la tangente ;
- $d(x) \leq 0$  : elle est **en dessous** ;
- $d$  **change de signe** en  $a$  : la tangente **traverse** — le point est un **point d'inflexion**.

**Factorisation attendue.**  $d$  admet **toujours**  $a$  comme racine **au moins double** : on peut donc factoriser par  $(x - a)^2$ .

**Convexité.**

- $f' \geq 0$  sur  $I$  :  $f$  est **convexe**, la courbe est **au-dessus** de toutes ses tangentes.
- $f' \leq 0$  :  $f$  est **concave**, la courbe est **en dessous**.
- $f'$  change de signe en  $a$  : **point d'inflexion**.

**Tangentes particulières.**

- **Horizontale** :  $f'(a) = 0$ .
- **Parallèle à une droite de pente  $m$**  : on résout  $f'(a) = m$ .
- **Passant par un point extérieur  $P$**  : on écrit que  $P$  vérifie l'équation de la tangente, ce qui donne une équation en  $a$ .

#### Correction de l'exercice 1 - Équation de tangente

- **Valeur** :  $f(3) = 9 - 12 + 1 = -2$ .
- **Dérivée** :  $f'(x) = 2x - 4$ , donc  $f'(3) = 2$ .
- **Tangente** :

$$y = 2(x - 3) - 2 = 2x - 8$$

- **Contrôle du point** :  $6 - 8 = -2$  ✓
- **Position relative** :

$$f(x) - (2x - 8) = x^2 - 4x + 1 - 2x + 8 = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \geq 0$$

- **Conclusion** : la courbe est **toujours au-dessus** de la tangente, avec contact unique en  $x = 3$  ✓

- **Cohérence** :  $f' = 2 > 0$ , la fonction est **convexe** — la courbe est bien au-dessus de toutes ses tangentes ✓
- **Contrôles** :  $f(4) = 1$  contre  $8 - 8 = 0$  ✓ (au-dessus) ;  $f(2) = -3$  contre  $4 - 8 = -4$  ✓
- **Tangente horizontale** :  $f'(x) = 0$  en  $x = 2$ , au sommet  $(2; -3)$  ✓

**Réponse.**  $y = 2x - 8$  ; la courbe est au-dessus  $(f(x) - y = (x - 3)^2)$ .

### Correction de l'exercice 2 - Approximation affine

**Racine carrée.**  $f(x) = \sqrt{x}$  avec  $a = 16$ ,  $h = 0,3$ .

- $f(16) = 4$  et  $f'(16) = \frac{1}{8} = 0,125$ .

$$\sqrt{16,3} \approx 4 + 0,3 \times 0,125 = 4,0375$$

- **Valeur exacte** : 4,037326 — erreur de  $1,74 \times 10^{-4}$  ✓
- **Sens** : l'approximation **surestime**, car la racine est **concave** ✓

**Inverse.**  $g(x) = \frac{1}{x}$  avec  $a = 2$ ,  $h = 0,02$ .

- $g(2) = 0,5$  et  $g'(2) = -\frac{1}{4} = -0,25$ .

$$\frac{1}{2,02} \approx 0,5 - 0,02 \times 0,25 = 0,495$$

- **Valeur exacte** : 0,4950495 — erreur de  $4,95 \times 10^{-5}$  ✓
- **Sens** : l'approximation **sous-estime**, car l'inverse est **convexe** sur  $]0; +\infty[$  ✓
- **Erreur relative** :  $4,3 \times 10^{-5}$  pour la racine,  $10^{-4}$  pour l'inverse — les deux sont excellentes.
- **Avec  $h$  dix fois plus petit** :  $\sqrt{16,03} \approx 4 + 0,00375 = 4,00375$  contre 4,0037483 — erreur de  $1,75 \times 10^{-6}$ , soit **cent fois** moins ✓

**Réponse.**  $\sqrt{16,3} \approx 4,0375$  (exact 4,03733) et  $\frac{1}{2,02} \approx 0,495$  (exact 0,49505).

### Correction de l'exercice 3 - Tangente horizontale

- **Dérivée** :  $f(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x - 2)(x + 2)$ .

- **Racines** : -2, 0 et 2.

- **Valeurs** :

$$f(0) = 3 \quad f(\pm 2) = 16 - 32 + 3 = -13$$

- **Tangentes horizontales** :  $y = 3$  (en  $x = 0$ ) et  $y = -13$  (en  $x = \pm 2$ ).
- **Nature** :  $f$  passe de - à + en  $\pm 2$  (**minimums globaux**) et de + à - en 0 (**maximum local**) ✓
- **Parité** :  $f$  est **paire**, d'où les deux minimums symétriques ✓
- **Contrôles** :  $f(1) = 1 - 8 + 3 = -4$  ;  $f(3) = 81 - 72 + 3 = 12$  ✓
- **Nombre de points de contact** : la tangente  $y = -13$  touche la courbe en **deux** points ( $\pm 2$ ) — une tangente peut avoir plusieurs points de contact ✓
- **Position par rapport à  $y = -13$**  :  $f(x) + 13 = x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4)^2 \geq 0$  — la courbe est bien **toujours au-dessus** ✓
- **Contrôle du développement** :  $(x^2 - 4)^2 = x^4 - 8x^2 + 16$  ✓

**Réponse.**  $y = 3$  en  $x = 0$  et  $y = -13$  en  $x = \pm 2$ .

### Correction de l'exercice 4 - Tangente parallèle à une droite

- **Condition** :  $f(x) = 9$ , avec  $f(x) = 3x^2 - 3$ .
- **Équation** :  $3x^2 - 3 = 9$ , donc  $x^2 = 4$  et  $x = \pm 2$ .
- **Points** :  $f(2) = 8 - 6 = 2$  et  $f(-2) = -8 + 6 = -2$ .  
 $A(2; 2) \quad B(-2; -2)$
- **Tangentes** :  $y = 9(x - 2) + 2 = 9x - 16$  et  $y = 9(x + 2) - 2 = 9x + 16$ .
- **Contrôles** : la première passe par  $(2; 2)$  car  $18 - 16 = 2$  ✓ ; la seconde par  $(-2; -2)$  car  $-18 + 16 = -2$  ✓
- **Parallélisme** : les deux tangentes ont bien la pente 9, comme la droite donnée ✓
- **Non-confusion avec la droite donnée** :  $y = 9x + 2$  a une ordonnée à l'origine de 2, différente de  $\pm 16$  — elle n'est **pas** tangente à la courbe.
- **Imparité** :  $f$  est impaire, d'où la symétrie des deux points par rapport à l'origine ✓
- **Position relative** :  $f(x) - (9x - 16) = x^3 - 12x + 16 = (x - 2)^2(x + 4)$  — la courbe est en dessous pour  $x < -4$  et au-dessus ensuite ✓
- **Contrôle du développement** :  
 $(x^2 - 4x + 4)(x + 4) = x^3 + 4x^2 - 4x^2 - 16x + 4x + 16 = x^3 - 12x + 16$  ✓

**Réponse.**  $A(2; 2)$  et  $B(-2; -2)$ , avec les tangentes  $y = 9x - 16$  et  $y = 9x + 16$ .

### Correction de l'exercice 5 - Point d'inflexion

- **Dérivée** :  $f(x) = 3x^2 - 12x$  ; **dérivée seconde** :  $f''(x) = 6x - 12$ .
- **Annulation de  $f''$**  :  $x = 2$ , avec changement de signe (négative avant, positive après) ✓
- **Point d'inflexion** :  $f(2) = 8 - 24 + 5 = -11$ , donc  $I(2; -11)$ .
- **Tangente** :  $f'(2) = 12 - 24 = -12$ , donc  
 $y = -12(x - 2) - 11 = -12x + 13$
- **Contrôle du point** :  $-24 + 13 = -11$  ✓
- **Position relative** :  
 $f(x) - (-12x + 13) = x^3 - 6x^2 + 5 + 12x - 13 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = (x - 2)^3$
- **Contrôle du développement** :  $(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$  ✓
- **Signe** : celui de  $x - 2$  — la courbe est **en dessous** avant 2 et **au-dessus** après : la tangente **traverse** ✓
- **Concavité** :  $f$  est **concave** sur  $] -\infty; 2]$  et **convexe** sur  $[2; +\infty[$  ✓
- **Contrôles** :  $f(0) = 5$  contre 13 (en dessous ✓) ;  $f(4) = 64 - 96 + 5 = -27$  contre  $-48 + 13 = -35$  (au-dessus ✓)
- **Remarque** : 2 est racine **triple** de la différence — c'est la signature d'un point d'inflexion à tangente traversante.

**Réponse.**  $I(2; -11)$  avec la tangente  $y = -12x + 13$  ;  $f(x) - y = (x - 2)^3$  change de signe.

### Correction de l'exercice 6 - Tangente passant par l'origine

- **Tangente au point d'abscisse  $a$**  :  $f(a) = a^2 + 2a + 4$  et  $f'(a) = 2a + 2$ .  
 $y = (2a + 2)(x - a) + a^2 + 2a + 4 = (2a + 2)x - 2a^2 - 2a + a^2 + 2a + 4 = (2a + 2)x - a^2 + 4$
- **Passage par l'origine** :  $0 = -a^2 + 4$ , donc  $a^2 = 4$  et  $a = \pm 2$ .
- **Deux tangentes** :
- pour  $a = 2$  : pente 6, donc  $y = 6x$  ;

- pour  $a = -2$  : pente  $-2$ , donc  $y = -2x$ .
- **Points de contact** :  $f(2) = 4 + 4 + 4 = 12$ , soit  $(2 ; 12)$  ; et  $f(-2) = 4 - 4 + 4 = 4$ , soit  $(-2 ; 4)$ .
- **Contrôles** :  $6 \times 2 = 12 \checkmark$  et  $-2 \times (-2) = 4 \checkmark$
- **Vérification de la tangence** :  $f(x) - 6x = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0 \checkmark$  et  $f(x) + 2x = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0 \checkmark$
- **Position de l'origine** :  $f(0) = 4 > 0$ , donc l'origine est **en dessous** de la parabole (qui a un minimum  $f(-1) = 3 > 0$ ) — d'où l'existence de **deux** tangentes  $\checkmark$
- **Si le point était intérieur** (par exemple  $(0 ; 5)$ ) : on aurait  $5 = -a^2 + 4$ , soit  $a^2 = -1$  — **aucune** tangente  $\checkmark$

**Réponse.**  $y = 6x$  (contact en  $(2 ; 12)$ ) et  $y = -2x$  (contact en  $(-2 ; 4)$ ).

### Correction de l'exercice 7 - Convexité

- **Dérivées** :  $f(x) = 4x^3 - 12x$  et  $f'(x) = 12x^2 - 12 = 12(x - 1)(x + 1)$ .
- **Signe de  $f'$**  : positive à l'extérieur de  $[-1 ; 1]$ , négative à l'intérieur.
- **Convexité** :  $f$  est **convexe** sur  $] -\infty ; -1]$ , **concave** sur  $[-1 ; 1]$ , **convexe** sur  $[1 ; +\infty[$ .
- **Points d'inflexion** : en  $x = \pm 1$ , car  $f'$  y **change de signe**  $\checkmark$
- **Valeurs** :  $f(\pm 1) = 1 - 6 + 2 = -3$ , donc  $I_1(-1 ; -3)$  et  $I_2(1 ; -3)$ .
- **Tangentes en ces points** :  $f(1) = 4 - 12 = -8$ , donc  $y = -8(x - 1) - 3 = -8x + 5$  ; et  $f(-1) = 8$ , donc  $y = 8x + 5 \checkmark$
- **Extremums** :  $f(x) = 4x(x^2 - 3)$  s'annule en 0 et  $\pm\sqrt{3}$ .
- $f(0) = 2$  (**maximum local**) et  $f(\pm\sqrt{3}) = 9 - 18 + 2 = -7$  (**minimums globaux**)  $\checkmark$
- **Contrôles** :  $f'(0) = -12 < 0 \checkmark$  (concave au maximum local) et  $f'(\sqrt{3}) = 36 - 12 = 24 > 0 \checkmark$  (convexe aux minimums)
- **Parité** :  $f$  est **paire**, d'où la symétrie de tous ces résultats  $\checkmark$
- **Ordre des abscisses** :  $-\sqrt{3} < -1 < 0 < 1 < \sqrt{3}$ , soit minimum, inflexion, maximum, inflexion, minimum  $\checkmark$

**Réponse.** Convexe hors de  $[-1 ; 1]$ , concave dedans ; inflexions en  $(\pm 1 ; -3)$ .

### Correction de l'exercice 8 - Approximation d'un calcul

- **Fonction** :  $f(x) = x^3$  avec  $a = 3$  et  $h = -0,02$ .
- **Éléments** :  $f(3) = 27$  et  $f'(3) = 27$ .
- **Approximation** :  

$$2,98^3 \approx 27 + (-0,02) \times 27 = 27 - 0,54 = 26,46$$
- **Valeur exacte** :  $2,98^3 = 26,463592$ .
- **Erreur** :  $3,59 \times 10^{-3}$ , soit une erreur relative de  $1,4 \times 10^{-4} \checkmark$
- **Sens** : l'approximation **sous-estime**, car  $x^3$  est **convexe** pour  $x > 0$  — la courbe est au-dessus de sa tangente  $\checkmark$
- **Terme suivant** : l'erreur vaut environ  $\frac{f''(3)h^2}{2} = \frac{18 \times 0,0004}{2} = 0,0036$ , très proche des 0,003592 observés  $\checkmark$
- **Contrôle direct** :  $2,98^2 = 8,8804$ , puis  $\times 2,98 = 26,463592 \checkmark$
- **Avec  $h$  plus grand** :  $2,8^3 \approx 27 - 0,2 \times 27 = 21,6$  contre 21,952 exact — erreur de 0,352, soit **cent fois** plus pour un  $h$  dix fois plus grand  $\checkmark$
- **Usage** : l'approximation affine permet un calcul mental rapide, à condition de rester **près** du point de référence.

**Réponse.**  $2,98^3 \approx 26,46$  (exact 26,4636), erreur de  $3,6 \times 10^{-3}$ .

### Correction de l'exercice 9 - Position relative de deux courbes

- **Différence** :  $d(x) = x^3 - 4x + 3$ .
- **Racine évidente** :  $d(1) = 1 - 4 + 3 = 0$  ✓
- **Factorisation** :  $x^3 - 4x + 3 = (x - 1)(x^2 + x - 3)$ .
- **Contrôle du développement** :  $x^3 + x^2 - 3x - x^2 - x + 3 = x^3 - 4x + 3$  ✓
- **Autres racines** :  $x^2 + x - 3 = 0$  a pour discriminant  $1 + 12 = 13$ , donc  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ , soit environ 1,3028 et -2,3028.
- **Signe de  $d$**  — produit de trois facteurs de racines -2,3028, 1 et 1,3028 :
  - sur  $] -\infty ; -2,3028[$  : négatif ;
  - sur  $] -2,3028 ; 1[$  : positif ;
  - sur  $] 1 ; 1,3028[$  : négatif ;
  - sur  $] 1,3028 ; +\infty[$  : positif.
- **Conclusion** : la cubique **coupe** la droite en **trois** points, ce qui découpe  $\mathbb{R}$  en quatre régions où la position s'inverse à chaque fois ✓
- **Points d'intersection** :  $(-2,3028 ; -12,2112)$ ,  $(1 ; 1)$  et  $(1,3028 ; 2,2112)$ .
- **Contrôles** :  $d(0) = 3 > 0$  ✓ ;  $d(1,2) = 1,728 - 4,8 + 3 = -0,072 < 0$  ✓ ;  
 $d(2) = 8 - 8 + 3 = 3 > 0$  ✓ ;  $d(-3) = -27 + 12 + 3 = -12 < 0$  ✓
- **Vérification d'un point** :  $g(1,3028) = 5,2112 - 3 = 2,2112$  et  
 $f(1,3028) = 1,3028^3 \approx 2,2112$  ✓

**Réponse.** Trois points d'intersection ;  $d(x) = (x - 1)(x^2 + x - 3)$  donne le signe.

### Correction de l'exercice 10 - Tangente à une hyperbole

- **Valeur** :  $f(-1) = -2$ .
- **Dérivée** :  $f(x) = -\frac{2}{x^2}$ , donc  $f(-1) = -2$ .
- **Tangente** :
 
$$y = -2(x + 1) - 2 = -2x - 4$$
- **Contrôle du point** :  $2 - 4 = -2$  ✓
- **Position relative** :
 
$$f(x) - (-2x - 4) = \frac{2}{x} + 2x + 4 = \frac{2 + 2x^2 + 4x}{x} = \frac{2(x^2 + 2x + 1)}{x} = \frac{2(x + 1)^2}{x}$$
- **Signe** :  $(x + 1)^2 \geq 0$ , donc la différence a le signe de  $x$ .
- **Conclusion** :
  - sur  $] -\infty ; 0[$  : la courbe est **en dessous** de la tangente (sauf contact en -1) ;
  - sur  $] 0 ; +\infty[$  : elle est **au-dessus**.
- **Contrôles** :  $f(-2) = -1$  contre  $4 - 4 = 0$  ✓ (en dessous) ;  $f(1) = 2$  contre  $-6$  ✓ (au-dessus)
- **Convexité** :  $f'(x) = \frac{4}{x^3}$ , négative sur  $] -\infty ; 0[$  (concave, courbe sous ses tangentes ✓) et positive sur  $] 0 ; +\infty[$  (convexe) ✓
- **Absence d'inflexion** :  $f'$  change de signe en 0, mais 0 n'est **pas** dans le domaine — il n'y a donc **pas** de point d'inflexion ✓

**Réponse.**  $y = -2x - 4$  ;  $f(x) - y = \frac{2(x+1)^2}{x}$ , du signe de  $x$ .

### Correction de l'exercice 11 - Deux tangentes en un même point

- **Points communs** :  $x^2 = -x^2 + 4x - 2$  donne  $2x^2 - 4x + 2 = 0$ , soit  $x^2 - 2x + 1 = 0$  et
 
$$(x-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$
- **Un seul point commun** :  $(1; 1)$  ✓
- **Pentes** :  $f'(1) = 2$  et  $g'(1) = -2 + 4 = 2$  — **égales** ✓
- **Conclusion** : les courbes sont **tangentes** en  $(1; 1)$ , avec la tangente commune
 
$$y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$$
- **Contrôles** :  $2 - 1 = 1$  ✓ ;  $f(x) - (2x - 1) = (x - 1)^2 \geq 0$  ✓ ;  
 $g(x) - (2x - 1) = -x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2 \leq 0$  ✓
- **Configuration** : la parabole  $f$  est **au-dessus** de la tangente, la parabole  $g$  **en dessous** — elles se « touchent » de part et d'autre ✓
- **Cohérence des convexités** :  $f'' = 2 > 0$  (convexe) et  $g'' = -2 < 0$  (concave) ✓
- **Contrôle en  $x = 2$**  :  $f(2) = 4$ , la tangente vaut 3, et  $g(2) = -4 + 8 - 2 = 2$  — l'ordre  $g < \text{tangente} < f$  est respecté ✓
- **Racine double** : le fait que l'équation  $f = g$  ait une racine **double** est exactement la traduction algébrique de la tangence.

**Réponse.** Oui, en  $(1; 1)$ , avec la tangente commune  $y = 2x - 1$ .

### Correction de l'exercice 12 - Erreur d'approximation

- **Valeur exacte** :  $f(a+h) = (a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$ .
- **Approximation affine** :  $f(a) + hf'(a) = a^2 + 2ah$ .
- **Erreur** :
 
$$f(a+h) - [f(a) + hf'(a)] = h^2$$
- **Conclusion** : l'erreur vaut **exactement**  $h^2$ , indépendamment de  $a$  ✓
- **Signe** : toujours **positive** — l'approximation **sous-estime** systématiquement, cohérent avec la convexité de  $x^2$  ✓
- **Contrôles** : pour  $a = 3$  et  $h = 0,1$ , l'exact vaut 9,61 et l'approximation 9,6 — erreur  $0,01 = h^2$  ✓
- Pour  $h = 0,01$  : exact 9,0601, approximation 9,06, erreur 0,0001 ✓
- **Lien avec la dérivée seconde** : l'erreur générale vaut environ  $\frac{f''(a)h^2}{2}$  ; ici  $\frac{2h^2}{2} = h^2$  ✓  
 — et l'égalité est **exacte** parce que  $f$  est un polynôme de degré 2.
- **Interprétation géométrique** :  $h^2$  est l'écart vertical entre la parabole et sa tangente, qui croît comme le **carré** de la distance au point de contact.
- **Généralisation** : pour  $f(x) = x^3$ , l'erreur vaut  $3ah^2 + h^3$  — elle dépend cette fois de  $a$ .

**Réponse.** L'erreur vaut exactement  $h^2$  (l'approximation sous-estime toujours).

### Correction de l'exercice 13 - Tangente et asymptote

- **Valeur** :  $f(1) = 2$ .
- **Dérivée** :  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ , donc  $f'(1) = 0$ .
- **Tangente** : **horizontale**,

$$y = 2$$

— **Interprétation** :  $x = 1$  est le **minimum** de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  ✓

— **Position par rapport à la tangente** :

$$f(x) - 2 = x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$$

— **Conclusion** : la courbe est **au-dessus** de  $y = 2$ , avec contact en  $x = 1$  ✓

— **Asymptote oblique** :  $f(x) - x = \frac{1}{x} > 0$ , et  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$  en  $+\infty$  — la droite  $y = x$  est **asymptote**, approchée par au-dessus ✓

— **Écarts** :  $f(2) - 2 = 0,5$  ;  $f(10) - 10 = 0,1$  ;  $f(100) - 100 = 0,01$  ✓

— **Convexité** :  $f'(x) = \frac{2}{x^3} > 0$  — la fonction est **convexe** sur  $]0; +\infty[$ , donc au-dessus de **toutes** ses tangentes ✓

— **Inégalité obtenue** :  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  pour  $x > 0$ , avec égalité en  $x = 1$  ✓

— **Deux droites remarquables** : la tangente  $y = 2$  borne la courbe **par le bas**, l'asymptote  $y = x$  la **suit** à l'infini.

**Réponse.** Tangente horizontale  $y = 2$  ;  $f(x) - 2 = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$  et  $y = x$  est asymptote.

### Correction de l'exercice 14 - Recherche d'un point de contact

**Méthode 1 — par la dérivée.**

— **Pente** :  $f'(x) = 2x = 4$  donne  $x = 2$ .

— **Point** :  $f(2) = 6$ , donc  $(2; 6)$ .

— **Valeur de  $k$**  :  $6 = 8 + k$ , donc  $k = -2$ .

**Méthode 2 — par le discriminant.**

— **Intersection** :  $x^2 + 2 = 4x + k$ , soit  $x^2 - 4x + 2 - k = 0$ .

— **Tangence** :  $\Delta = 16 - 4(2 - k) = 8 + 4k = 0$ , donc  $k = -2$  ✓

— **Point de contact** : l'équation devient  $x^2 - 4x + 4 = 0$ , soit  $(x - 2)^2 = 0$  et  $x = 2$  ✓

— **Contrôle** : la droite  $y = 4x - 2$  passe bien par  $(2; 6)$  car  $8 - 2 = 6$  ✓

— **Position relative** :  $f(x) - (4x - 2) = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0$  — la parabole est **au-dessus** ✓

— **Discussion selon  $k$**  : pour  $k > -2$ , deux points d'intersection ; pour  $k = -2$ , tangence ; pour  $k < -2$ , aucun point ✓

— **Contrôle pour  $k = 0$**  :  $x^2 - 4x + 2 = 0$  a pour racines  $2 \pm \sqrt{2}$  — bien **deux** points ✓

— **Contrôle pour  $k = -4$**  :  $x^2 - 4x + 6 = 0$  a un discriminant  $16 - 24 = -8 < 0$  — **aucun** point ✓

**Réponse.**  $k = -2$ , avec un contact en  $(2; 6)$ .

### Correction de l'exercice 15 - Convexité et inégalité

— **Fonction** :  $f(x) = \sqrt{1+x}$ , définie sur  $[-1; +\infty[$ .

— **Dérivée** :  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ , donc  $f(0) = 1$  et  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .

— **Tangente en 0** :

$$y = 1 + \frac{x}{2}$$

— **Convexité** :  $f''(x) = -\frac{1}{4(1+x)^{3/2}} < 0$  — la fonction est **concave** ✓

- **Conséquence** : une fonction concave reste **en dessous** de toutes ses tangentes, donc

$$\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} \quad \text{pour tout } x \geq -1$$

- **Démonstration directe** :  $\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 - (1+x) = 1 + x + \frac{x^2}{4} - 1 - x = \frac{x^2}{4} \geq 0$ , et les deux membres sont positifs pour  $x \geq -1$ ... attention,  $1 + \frac{x}{2} \geq \frac{1}{2} > 0$  sur  $[-1; +\infty[$  ✓
- **Conclusion** : l'inégalité est démontrée, avec **égalité seulement en**  $x = 0$  ✓
- **Contrôles** :  $x = 3$  donne  $2 \leq 2,5$  ✓ ;  $x = 0,1$  donne  $1,048809 \leq 1,05$  ✓ ;  $x = -1$  donne  $0 \leq 0,5$  ✓
- **Usage pratique** : cette majoration est la base de l'approximation  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$  pour  $x$  petit, très utilisée en physique.
- **Précision** : l'erreur vaut environ  $\frac{x^2}{8}$  ; pour  $x = 0,1$ , cela donne  $0,00125$ , à comparer à l'écart réel de  $0,00119$  ✓

**Réponse.**  $f$  est concave, donc sous sa tangente  $y = 1 + \frac{x}{2}$  (égalité en  $x = 0$  seulement).

### Correction de l'exercice 16 - Synthèse : étude locale et globale

- a) **Dérivée** — avec  $u = x^2 - 2x$  et  $v = x + 1$  :

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+1) - (x^2-2x)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2-2x+2x-2-x^2+2x}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$$

- **Racines du numérateur** :  $\Delta = 4 + 8 = 12$ , donc  $x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$ .
- **Racine dans le domaine** :  $-1 + \sqrt{3} \approx 0,73205$ .
- **Signe** : négative avant, positive après — **minimum** ✓
- **Valeur du minimum** : avec  $x_0 = -1 + \sqrt{3}$ , on a  $x_0 + 1 = \sqrt{3}$  et  $x_0^2 = 4 - 2\sqrt{3}$ , donc

$$f(x_0) = \frac{4 - 2\sqrt{3} - 2(-1 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \frac{6 - 4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} - 4 = 2\sqrt{3} - 4 \approx -0,53590$$

- **Limites** : en  $-1^+$ , le numérateur tend vers  $3 > 0$  et le dénominateur vers  $0^+$ , donc  $f(x) \rightarrow +\infty$  ; en  $+\infty$ ,  $f(x) \rightarrow +\infty$  ✓

- b) **Tangente en 0** :  $f(0) = 0$  et  $f'(0) = \frac{-2}{1} = -2$ .

$$y = -2x$$

- c) **Position relative.**

$$f(x) - (-2x) = \frac{x^2-2x}{x+1} + 2x = \frac{x^2-2x+2x^2+2x}{x+1} = \frac{3x^2}{x+1}$$

- **Signe** : sur  $] -1 ; +\infty[$ , le dénominateur est positif et  $3x^2 \geq 0$ , donc la différence est **positive** ✓
- **Conclusion** : la courbe est **toujours au-dessus** de la tangente, avec contact unique en  $x = 0$  ✓
- **Contrôles** :  $f(1) = \frac{-1}{2} = -0,5$  contre  $-2$  ✓ (au-dessus) ;  $f(-0,5) = \frac{0,25+1}{0,5} = 2,5$  contre  $1$  ✓
- **Contrôle du minimum** :  $f(0,7) = \frac{0,49-1,4}{1,7} \approx -0,53529$  et  $f(0,75) = \frac{0,5625-1,5}{1,75} \approx -0,53571$  — tous deux supérieurs à  $-0,53590$  ✓
- **Racines de  $f$**  :  $x = 0$  et  $x = 2$  ✓

**Réponse.** a) minimum  $2\sqrt{3} - 4 \approx -0,536$  en  $x = \sqrt{3} - 1$  · b)  $y = -2x$  · c)

$$f(x) - y = \frac{3x^2}{x+1} \geq 0.$$