Plaquette 2 – Calculs de dérivées : produits, quotients et puissances

Dérivation et étude des fonctions — Première spé maths

Exercices

Méthode

On **identifie** la structure de la fonction (somme, produit, inverse, quotient, puissance entière) avant tout calcul, on pose u et v, on applique la formule adaptée, puis on **factorise** la dérivée pour étudier son signe. Un contrôle numérique par un taux de variation avec $h = 0{,}001$ détecte presque toutes les erreurs de formule.

Exercice 1 – Somme et multiple

Dériver $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + \dfrac{x^2}{2} - 7x + 9$, puis calculer $f'(2)$ et contrôler par un taux de variation.

Exercice 2 – Produit simple

Dériver $f(x) = (3x - 1)\left(x^2 + 2\right)$ de deux façons, puis étudier le sens de variation de f.

Exercice 3 – Quotient simple

Dériver $f(x) = \dfrac{3x + 2}{x - 4}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ et en déduire ses variations. Retrouver la dérivée en écrivant $f(x) = 3 + \dfrac{14}{x - 4}$.

Exercice 4 – Dériver un carré

Soit $f(x) = \left(x^2 - 3x\right)^2$. Dériver f en l'écrivant comme un produit, factoriser $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.

Exercice 5 – Produit avec une racine carrée

Soit $f(x) = (x - 1)\sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$, l'écrire sous la forme d'un seul quotient, puis déterminer le minimum de f.

Exercice 6 – Quotient à numérateur du second degré

Dériver $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x - 1}$ pour $x \neq \dfrac{1}{2}$, factoriser la dérivée et déterminer les extremums locaux. Que remarque-t-on sur leurs valeurs ?

Exercice 7 – Produit avec racine, croissance

Soit $f(x) = (x + 2)\sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$. Montrer que, pour $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{3x + 2}{2\sqrt{x}}$, en déduire le sens de variation de f et contrôler $f'(4)$ par un taux de variation.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – L'inverse d'une fonction

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$ avec la formule de la dérivée de $\dfrac{1}{v}$, étudier les variations de f et en déduire un encadrement de $f(x)$.

Exercice 9 – Trois facteurs

Dériver $f(x) = x(x-2)(x+3)$ en regroupant deux facteurs, contrôler en développant, puis déterminer les extremums locaux de f (valeurs approchées au millième).

Exercice 10 – Quotient avec racine

Soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+2}$ sur $]0\,;+\infty[$. Montrer que $f'(x) = \dfrac{2-x}{2\sqrt{x}\,(x+2)^2}$, puis déterminer le maximum de f. Vérifier que $f(1) = f(4)$ et l'expliquer.

Exercice 11 – Puissances d'exposant négatif

Soit $f(x) = \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$. Écrire $f(x)$ à l'aide de puissances d'exposant négatif, dériver avec $(x^n)' = nx^{n-1}$, puis étudier les variations de f.

Exercice 12 – Dérivée et tangente

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ au point d'abscisse 2, puis le point où elle coupe l'axe des abscisses.

Exercice 13 – Trouver une fonction à partir de conditions

Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$. Déterminer a, b, c sachant que $f(0) = 2$, $f(1) = 0$ et que la tangente au point d'abscisse 1 est horizontale. Étudier ensuite les variations de f.

Exercice 14 – Un quotient simplifié d'abord

Soit $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x}$ pour $x \neq 0$. Dériver f de deux façons : par la formule du quotient, puis après avoir écrit $f(x) = x + 2 + \dfrac{1}{x}$. Déterminer ensuite les extremums locaux.

Exercice 15 – L'inverse d'un carré

Soit $f(x) = \dfrac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$. On pose $v(x) = \left(x^2+1\right)^2$. Calculer $v'(x)$ en écrivant v comme un produit, en déduire $f'(x)$, puis contrôler $f'(1)$ par un taux de variation.

Exercice 16 – Synthèse : trois dérivées à factoriser

Dériver, factoriser et étudier le signe de la dérivée :

a) $f(x) = \left(x^2-4\right)\sqrt{x}$ pour $x > 0$;

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$;

c) $h(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ pour $x \neq 1$.

d) Déduire de b) que, pour tout réel x, $-1 \leq \dfrac{2x}{x^2+1} \leq 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).