Plaquette 1 – Calculs de dérivées et variations

Dérivation et étude des fonctions — Première spé maths

Exercices

Méthode

On calcule des dérivées (dérivées usuelles, somme, produit, quotient), on écrit une équation de tangente, puis on utilise le **signe de** f' pour dresser un tableau de variations et déterminer des extremums. Les deux derniers exercices sont des problèmes d'optimisation : c'est là que la dérivation sert vraiment.

Exercice 1 – Dérivée d'un polynôme

Calculer la dérivée de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 – Racine carrée et inverse

Calculer la dérivée de $f(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{3}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 3 – Dérivée d'un produit

Calculer, sous forme développée et réduite, la dérivée de $f(x) = (2x+1)(x^2-3)$.

Exercice 4 – Dérivée d'un quotient

Calculer la dérivée de $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, et en déduire le sens de variation de f.

Exercice 5 – Équation de tangente

Soit $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $a = 2$.

Exercice 6 – Tableau de variations

Soit $f(x) = x^3 - 3x$ définie sur $\mathbb{R}$. Étudier le signe de f', dresser le tableau de variations et préciser les extremums locaux.

Exercice 7 – Extremum d'un trinôme par la dérivée

Soit $f(x) = 2x^2 - 12x + 5$. Déterminer l'extremum de f et préciser sa nature.

Exercice 8 – Une fonction avec un inverse

Soit $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$. Étudier ses variations et déterminer son minimum.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Optimisation : un enclos contre un mur

On dispose de 100 m de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire, l'un des côtés étant constitué par un mur déjà existant (donc non grillagé). On note x la longueur, en mètres, de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur.

a) Exprimer l'aire $A(x)$ de l'enclos en fonction de x, et préciser l'intervalle d'étude.

b) Déterminer les dimensions qui rendent l'aire maximale, et cette aire.

Exercice 10 – Optimisation : bénéfice d'une entreprise

Une entreprise produit x tonnes d'un matériau, avec $0 \leq x \leq 60$. Son bénéfice, en centaines d'euros, est modélisé par

$$B(x) = -0{,}5x^2 + 40x - 300$$

a) Déterminer la production qui rend le bénéfice maximal et calculer ce bénéfice en euros.

b) À partir de quelle production l'entreprise devient-elle bénéficiaire ? (On résoudra $B(x) = 0$.)

Exercice 11 – Du taux de variation au nombre dérivé

Soit $f(x) = x^2$.

a) Pour $h \neq 0$, montrer que le taux de variation de f entre 3 et $3 + h$ vaut $6 + h$.

b) Calculer ce taux pour $h = 0{,}1$, puis $h = -0{,}01$. Vers quel nombre se rapproche-t-il quand h se rapproche de 0 ?

c) En déduire $f'(3)$ et l'équation de la tangente au point d'abscisse 3.

Exercice 12 – Puissances, inverse et racine

Calculer la dérivée de $f(x) = x^5 - \dfrac{2}{x^2} + 3\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$, puis calculer $f'(1)$.

Exercice 13 – La hauteur d'une balle

Une balle lancée verticalement est à la hauteur $h(t) = -5t^2 + 20t + 1$ (en mètres) à l'instant t (en secondes), pour $t \in [0\,;4]$.

a) Calculer la vitesse instantanée $h'(t)$, puis $h'(1)$ et $h'(3)$. Interpréter leurs signes.

b) À quel instant la balle atteint-elle sa hauteur maximale ? Quelle est cette hauteur ?

Exercice 14 – Variations sur un intervalle fermé

Soit $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$ sur l'intervalle $[-2\,;5]$. Dresser le tableau de variations de f et déterminer son minimum et son maximum sur cet intervalle.

Exercice 15 – Synthèse : tangentes horizontales

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2$.

a) Déterminer les abscisses des points où la tangente à la courbe est horizontale.

b) Donner l'équation de la tangente en $x = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Existe-t-il un point où la tangente a pour coefficient directeur 9 ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).