

Plaquette 1 - Calculs de dérivées et variations

Dérivation et étude des fonctions — Première spé maths

Exercices

Méthode

On calcule des dérivées (dérivées usuelles, somme, produit, quotient), on écrit une équation de tangente, puis on utilise le **signe de f'** pour dresser un tableau de variations et déterminer des extremums. Les deux derniers exercices sont des problèmes d'optimisation : c'est là que la dérivation sert vraiment.

Exercice 1 - Dérivée d'un polynôme

Calculer la dérivée de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 - Racine carrée et inverse

Calculer la dérivée de $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{3}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 3 - Dérivée d'un produit

Calculer, sous forme développée et réduite, la dérivée de $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$.

Exercice 4 - Dérivée d'un quotient

Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, et en déduire le sens de variation de f .

Exercice 5 - Équation de tangente

Soit $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Déterminer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $a = 2$.

Exercice 6 - Tableau de variations

Soit $f(x) = x^3 - 3x$ définie sur $\mathbb{R}$. Étudier le signe de f' , dresser le tableau de variations et préciser les extremums locaux.

Exercice 7 - Extremum d'un trinôme par la dérivée

Soit $f(x) = 2x^2 - 12x + 5$. Déterminer l'extremum de f et préciser sa nature.

Exercice 8 - Une fonction avec un inverse

Soit $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$. Étudier ses variations et déterminer son minimum.

Exercice 9 - Optimisation : un enclos contre un mur

On dispose de 100 m de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire, l'un des côtés étant constitué par un mur déjà existant (donc non grillagé). On note x la longueur, en mètres, de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur.

- Exprimer l'aire $A(x)$ de l'enclos en fonction de x , et préciser l'intervalle d'étude.
- Déterminer les dimensions qui rendent l'aire maximale, et cette aire.

Exercice 10 - Optimisation : bénéfice d'une entreprise

Une entreprise produit x tonnes d'un matériau, avec $0 \leq x \leq 60$. Son bénéfice, en centaines d'euros, est modélisé par

$$B(x) = -0,5x^2 + 40x - 300$$

- Déterminer la production qui rend le bénéfice maximal et calculer ce bénéfice en euros.
- À partir de quelle production l'entreprise devient-elle bénéficiaire ? (On résoudra $B(x) = 0$.)

Exercice 11 - Synthèse : tangentes horizontales

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2$.

- Déterminer les abscisses des points où la tangente à la courbe est horizontale.
- Donner l'équation de la tangente en $x = 1$.
- Existe-t-il un point où la tangente a pour coefficient directeur 9 ?