Plaquette 4 – Études de fonctions rationnelles et irrationnelles

Dérivation et étude des fonctions — Première spé maths

Exercices

Méthode

Une étude de fonction suit toujours le même plan : **ensemble de définition** (dénominateur non nul, radicande positif), **dérivée** factorisée, **signe** de la dérivée par un tableau, **variations** sur chaque intervalle, **extremums**. On s'en sert ensuite pour démontrer une inégalité, comparer deux fonctions ou résoudre une équation. On étudie aussi la parité et la dérivabilité en un point de $\sqrt{x}$ et de $|x|$.

Exercice 1 – Domaine et variations d'un quotient

Soit $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4}$. Déterminer l'ensemble de définition de f, montrer que $f'(x) = \dfrac{-x^2-6x-4}{\left(x^2-4\right)^2}$, puis dresser le tableau de variations de f sur chacun des intervalles de définition.

Exercice 2 – Une fonction homographique

Soit $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$.

a) Calculer $f'(x)$ et donner le sens de variation de f.

b) Montrer que $f(x) = 2 + \dfrac{3}{x-1}$ et en déduire que $f(x) > 2$ pour tout $x > 1$.

c) Résoudre $f(x) = 5$ sur $]1\,;+\infty[$.

Exercice 3 – Une somme et son minimum

Soit $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2}$ et dresser le tableau de variations.

b) En déduire que, pour tout $x > 0$, $x + \dfrac{4}{x} \geq 4$.

c) Résoudre $f(x) = 5$.

Exercice 4 – Racine carrée et maximum

Soit $f(x) = \sqrt{x}\,(3-x)$ sur $[0\,;3]$. Montrer que, pour $0 < x \leq 3$, $f'(x) = \dfrac{3(1-x)}{2\sqrt{x}}$, puis déterminer le maximum de f.

Exercice 5 – Quotient de degrés deux sur un

Soit $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$. Calculer $f'(x)$, étudier les variations de f et montrer que $f(x) \geq 1$ pour tout $x > -1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Extremums sur un intervalle fermé

Soit $f(x) = x + \frac{4}{x}$ sur l'intervalle $[1\,;8]$. Déterminer le minimum et le maximum de f sur cet intervalle.

Exercice 7 – Une famille de fonctions

Pour un réel $m > 0$, on pose $f_m(x) = \dfrac{x}{x^2+m}$ sur $[0\,;+\infty[$.

a) Montrer que $f_m'(x) = \dfrac{m-x^2}{\left(x^2+m\right)^2}$.

b) En déduire que f_m admet un maximum, dont on donnera la valeur en fonction de m.

c) Pour quelle valeur de m ce maximum vaut-il $\frac{1}{4}$?

Exercice 8 – Comparer deux fonctions

On considère $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Étudier la position relative de leurs courbes, puis dire si elles ont un point commun.

Exercice 9 – Parité et variations

Soit $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que f est impaire. Que peut-on en déduire pour sa courbe ?

b) Montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$ et en déduire le sens de variation de f.

c) Déterminer l'équation de la tangente en 0 et la position de la courbe par rapport à elle.

Exercice 10 – La valeur absolue en 0

a) Pour $h \neq 0$, calculer le taux de variation de la fonction valeur absolue entre 0 et h. Que vaut-il pour $h > 0$? pour $h < 0$? La fonction $x \mapsto |x|$ est-elle dérivable en 0 ?

b) Même question pour $g(x) = x|x|$.

Exercice 11 – La racine carrée n'est pas dérivable en 0

a) Pour $h > 0$, calculer le taux de variation de la fonction racine carrée entre 0 et h, puis le calculer pour $h = 0{,}01$, $h = 0{,}0001$ et $h = 10^{-6}$. Que peut-on en conclure ?

b) Interpréter graphiquement.

c) La fonction $k(x) = x\sqrt{x}$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 12 – Démontrer une inégalité

Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $\sqrt{x} \leq \dfrac{x+1}{2}$, en étudiant la fonction $g(x) = \dfrac{x+1}{2} - \sqrt{x}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Dans quel cas a-t-on l'égalité ? Interpréter à l'aide de la tangente à la courbe de la racine carrée en 1.

Exercice 13 – Une étude sur un intervalle fermé

Soit $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$ sur $[0\,;5]$.

a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;5]$ et déterminer son minimum et son maximum.

c) Résoudre l'équation $f(x) = 1$ sur $[0\,;5]$.

Exercice 14 – Lire et justifier un tableau de variations

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ sur $[-3\,;5]$.

a) Dresser le tableau de variations de f sur $[-3\,;5]$.

b) Donner le minimum et le maximum de f sur cet intervalle.

c) En déduire que, pour tout $x \in [-3\,;5]$, $-22 \leq f(x) \leq 10$.

Exercice 15 – Synthèse : étude complète d'une fonction rationnelle

Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$.

a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$ et dresser le tableau de variations de f.

b) En déduire que $f(x) \geq 3$ pour tout $x > 1$.

c) Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.

d) Montrer que $f(x) - (x-2) = \dfrac{4}{x-1}$ et en déduire la position de la courbe par rapport à la droite $D : y = x - 2$.

e) Résoudre $f(x) = 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).