

Plaquette 5 - Problèmes de synthèse : modélisation, convexité et algorithmes

Dérivation et étude des fonctions — Première spé maths

Exercices

Méthode

On modélise un problème concret par une fonction, on l'étudie **complètement**, on exploite la **convexité**, et on automatise la recherche d'extremums ou de racines par un **algorithme**.

Exercice 1 - Convexité d'une cubique

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Déterminer les intervalles de convexité et le point d'inflexion.

Exercice 2 - Modèle de croissance

Le nombre d'utilisateurs d'une application, en milliers, est $N(t) = \frac{100t^2}{t^2 + 25}$ après t mois. Étudier la croissance et déterminer le point d'inflexion.

Exercice 3 - Rendements décroissants

La production d'une usine est $P(x) = 60\sqrt{x}$ (en tonnes) pour x ouvriers. Étudier la concavité et interpréter économiquement.

Exercice 4 - Algorithme de recherche d'extremum

Ce script cherche le maximum d'une fonction. Que renvoie-t-il pour $f(x) = 4x - x^2$ sur $[0; 4]$ avec $n = 8$?

```
def f(x):
    return 4*x - x*x

a, b, n = 0, 4, 8
h = (b - a) / n
xm = a
for k in range(n + 1):
    x = a + k * h
    if f(x) > f(xm):
        xm = x
print(xm, f(xm))
```

Exercice 5 - Coût et convexité

Le coût de production est $C(q) = 0,01q^3 - 0,6q^2 + 15q + 200$ pour $q \in [0; 60]$. Déterminer où le coût marginal est minimal.

Exercice 6 - Modélisation d'une épidémie

Le nombre de cas cumulés est $f(t) = \frac{1000}{1 + 9 \times 0,7^t}$ (en milliers de personnes, t en semaines). Déterminer le pic de propagation.

Exercice 7 - Position par rapport aux cordes

Soit $f(x) = x^2$. Montrer que pour tous $a < b$ et tout $t \in [0; 1]$, on a $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$.

Exercice 8 - Dichotomie sur la dérivée

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$. Localiser son minimum local à 10^{-1} près par dichotomie sur f .

Exercice 9 - Deux modèles concurrents

Comparer les modèles $f(t) = 20\sqrt{t}$ et $g(t) = 5t$ sur $[0; +\infty[$: lequel croît le plus vite, et quand se croisent-ils ?

Exercice 10 - Fonction et algorithme de seuil

Soit $f(x) = \frac{100x}{x+10}$. Écrire un algorithme donnant le plus petit entier x tel que $f(x) > 90$, puis le calculer.

Exercice 11 - Optimisation d'une recette

Une entreprise vend $q(p) = \frac{1000}{p+5}$ unités au prix p . Déterminer le prix maximisant la recette, puis commenter.

Exercice 12 - Convexité d'un quotient

Étudier la convexité de $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ puis sur $] -\infty; 0[$.

Exercice 13 - Modèle de dosage

Le rendement d'une réaction est $R(x) = 100x(1-x)$ pour une concentration $x \in [0; 1]$. Déterminer le rendement maximal et la plage où il dépasse 20 %.

Exercice 14 - Tangente et algorithme de Newton

Pour approcher la racine de $f(x) = x^2 - 2$, on part de $x_0 = 1$ et l'on prend pour x_{n+1} l'abscisse où la tangente en x_n coupe l'axe. Calculer x_1, x_2, x_3 .

Exercice 15 - Étude et interprétation

La hauteur d'un liquide dans un récipient conique est $h(t) = 10\sqrt[3]{1 - \frac{t}{60}}$ pour $t \in [0; 60]$ (en cm, t en secondes). À quel instant la hauteur diminue-t-elle le plus

vite ?

Exercice 16 - Synthèse : conception d'un emballage

Une boîte à base carrée de côté x et de hauteur h doit avoir un volume de 500 cm^3 . Le carton coûte $0,02 \text{ €/cm}^2$ pour le fond et le couvercle, $0,01 \text{ €/cm}^2$ pour les côtés.

- Exprimer le coût en fonction de x .
- Minimiser ce coût.
- Vérifier par un calcul de convexité que le minimum est global.