Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : modélisation, optimisation et algorithmes

Dérivation et étude des fonctions — Première spé maths

Exercices

Méthode

On **modélise** une situation (géométrie, économie, physique, biologie) par une fonction d'une variable, on précise l'intervalle où elle a un sens, on l'étudie avec sa dérivée et l'on **interprète** le résultat dans le contexte : dimensions optimales, coût marginal, vitesse instantanée, instant où une grandeur varie le plus vite. Quand le calcul exact est impossible, des algorithmes (balayage, dichotomie, méthode de Newton) fournissent des valeurs approchées.

Exercice 1 – La boîte sans couvercle

Dans une plaque carrée de 30 cm de côté, on découpe aux quatre coins des carrés de côté x cm, puis on relève les bords pour obtenir une boîte sans couvercle.

a) Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte et préciser l'intervalle d'étude.

b) Montrer que $V'(x) = (30 - 2x)(30 - 6x)$ et en déduire la valeur de x qui rend le volume maximal, ainsi que ce volume.

Exercice 2 – Coût marginal

Le coût de fabrication de q objets (en euros) est $C(q) = 0{,}1q^3 - 3q^2 + 40q + 100$ pour $0 \leq q \leq 30$.

a) Calculer le coût marginal $C'(q)$ et sa valeur pour $q = 10$.

b) Comparer $C'(10)$ au coût de fabrication du onzième objet, $C(11) - C(10)$.

c) Pour quelle production le coût marginal est-il le plus faible ?

Exercice 3 – Fixer un prix de vente

Une entreprise estime que, si elle vend un article au prix p euros ($20 \leq p \leq 100$), elle en vendra $q(p) = 200 - 2p$ par jour. Chaque article lui coûte 20 € à produire.

a) Exprimer la recette $R(p)$ et le bénéfice $B(p)$.

b) Déterminer le prix qui maximise la recette, puis celui qui maximise le bénéfice. Comparer.

Exercice 4 – Algorithme de recherche d'un maximum

Ce programme cherche le maximum d'une fonction par balayage.

```
def f(x):
    return 4*x - x*x

a, b, n = 0, 4, 8
h = (b - a) / n
xm = a
for k in range(n + 1):
```

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

```
    x = a + k * h
    if f(x) > f(xm):
        xm = x
print(xm, f(xm))
```

a) Qu'affiche-t-il ? Vérifier avec la dérivée.

b) Qu'affiche-t-il si l'on prend $n = 7$? Commenter.

Exercice 5 – Dichotomie sur la dérivée

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$. On veut localiser le minimum local de f situé dans $[1\,;2]$.

a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(1) < 0$ et $f'(2) > 0$.

b) Appliquer quatre étapes de dichotomie à f' sur $[1\,;2]$.

c) Comparer avec la valeur exacte.

Exercice 6 – Méthode de Newton

Pour approcher la solution positive de $x^2 = 2$, on pose $f(x) = x^2 - 2$, on part de $x_0 = 1$ et l'on prend pour x_{n+1} l'abscisse du point où la tangente à la courbe de f en x_n coupe l'axe des abscisses.

a) Montrer que $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n}$.

b) Calculer x_1, x_2 et x_3, et comparer à $\sqrt{2}$.

Exercice 7 – Les pentes des sécantes

On considère $f(x) = x^2$ et le point d'abscisse $a = 1$.

```
def f(x):
    return x * x

pas = [1, 0.1, 0.01, 0.001]
pentes = [(f(1 + h) - f(1)) / h for h in pas]
print(pentes)
```

a) Que contient la liste *pentes* ? Calculer ses valeurs exactes.

b) Montrer que, pour $h \neq 0$, la pente de la sécante vaut $2 + h$. Vers quel nombre les pentes se rapprochent-elles ? Que représente-t-il ?

Exercice 8 – Une inégalité par l'étude d'une fonction

Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, $x^3 \geq 3x - 2$.

On pourra étudier $g(x) = x^3 - 3x + 2$ sur $[0\,;+\infty[$, puis vérifier que $g(x) = (x-1)^2(x+2)$.

Exercice 9 – Le point d'une parabole le plus proche

On considère la parabole d'équation $y = x^2$ et le point $A(0\,;2)$. Pour un point $M(x\,;x^2)$ de la parabole, on note $d(x) = AM^2$.

a) Montrer que $d(x) = x^4 - 3x^2 + 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Étudier les variations de d et en déduire la distance minimale entre A et un point de la parabole.

Exercice 10 – Un mobile qui fait demi-tour

Un mobile se déplace sur un axe ; sa position à l'instant t (en secondes) est $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (en mètres), pour $t \in [0\,;5]$.

a) Calculer sa vitesse $v(t) = x'(t)$ et étudier son signe.

b) À quels instants le mobile fait-il demi-tour ? Où se trouve-t-il alors ?

c) Quelle distance totale a-t-il parcourue entre $t = 0$ et $t = 5$?

Exercice 11 – La canette la plus économique

Une canette cylindrique doit contenir 330 cm³. On note r son rayon et h sa hauteur, en cm.

a) Exprimer h en fonction de r, puis montrer que l'aire totale de métal vaut $S(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{660}{r}$.

b) Montrer que $S'(r) = \dfrac{4\pi r^3 - 660}{r^2}$ et en déduire que l'aire est minimale quand $r^3 = \dfrac{165}{\pi}$.

c) Donner une valeur approchée de r à 0,01 près à l'aide de la calculatrice (par essais), puis de h. Comparer h et $2r$.

Exercice 12 – Quand une population croît-elle le plus vite ?

Le nombre de bactéries d'une culture (en milliers) est modélisé par $P(t) = -t^3 + 12t^2 + 100$, où $t \in [0\,;10]$ est le temps en heures.

a) Calculer $P'(t)$ et montrer que la population augmente sur $[0\,;8]$.

b) La vitesse d'accroissement de la population est $P'(t)$. À quel instant est-elle la plus grande ? Que vaut-elle alors ?

c) Que se passe-t-il après $t = 8$?

Exercice 13 – Concentration d'un médicament

La concentration d'un médicament dans le sang (en mg/L) est modélisée par $c(t) = 20t\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}$, où $t \geq 0$ est le temps en heures après la prise.

a) Montrer que $c'(t) = 20\,\mathrm{e}^{-0{,}5t}(1 - 0{,}5t)$.

b) À quel instant la concentration est-elle maximale ? Donner sa valeur exacte, puis une valeur approchée.

c) Le médicament est efficace tant que la concentration dépasse 10 mg/L. L'est-il une heure après la prise ? quatre heures après ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Rectangle sous une parabole

On inscrit un rectangle sous l'arc de parabole $y = 9 - x^2$, $x \in [-3\,;3]$: deux sommets sont sur l'axe des abscisses, en $(-x\,;0)$ et $(x\,;0)$, et les deux autres sur la parabole, avec $0 \leq x \leq 3$.

a) Exprimer l'aire $A(x)$ du rectangle.

b) Déterminer la valeur de x qui rend l'aire maximale, ainsi que cette aire.

Exercice 15 – Synthèse : coût, bénéfice et rentabilité

Une entreprise fabrique q centaines d'objets par jour, $q \in [0\,;10]$. Son coût de production est $C(q) = q^3 - 12q^2 + 60q$ et chaque centaine d'objets est vendue 36 (en centaines d'euros).

a) Calculer le coût marginal $C'(q)$. Pour quelle production est-il minimal ?

b) Montrer que le bénéfice vaut $B(q) = -q^3 + 12q^2 - 24q$, puis que $B'(q) = -3\left(q^2 - 8q + 8\right)$.

c) Déterminer la production qui maximise le bénéfice et la valeur de ce bénéfice (à 0,01 près).

d) Montrer que $B(q) = -q\left(q^2 - 12q + 24\right)$ et en déduire les productions pour lesquelles l'entreprise est bénéficiaire.

e) Écrire un programme Python qui retrouve, par balayage au pas de 0,01, la production qui maximise le bénéfice.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).