Plaquette 3 – Tangentes, approximations affines et positions relatives

Dérivation et étude des fonctions — Première spé maths

Exercices

Méthode

On écrit l'équation d'une tangente, on cherche les points où la tangente a une pente imposée ou passe par un point donné, on utilise la fonction affine tangente pour **approcher** une valeur, et l'on compare une courbe à une droite ou à une autre courbe en étudiant le **signe de leur différence**, le plus souvent après factorisation.

Exercice 1 – Équation de tangente et position

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1$. Déterminer la tangente T à la courbe au point d'abscisse 3, puis étudier la position de la courbe par rapport à T.

Exercice 2 – Approximation affine

Utiliser l'approximation affine pour estimer $\sqrt{16{,}3}$ (avec $a = 16$) et $\dfrac{1}{2{,}02}$ (avec $a = 2$), puis comparer aux valeurs données par la calculatrice.

Exercice 3 – Tangentes horizontales

Déterminer les tangentes horizontales à la courbe de $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$, puis justifier que la courbe est au-dessus de la droite $y = -13$.

Exercice 4 – Tangente parallèle à une droite

Déterminer les points de la courbe de $f(x) = x^3 - 3x$ où la tangente est parallèle à la droite $D : y = 9x + 2$, puis donner les équations de ces tangentes.

Exercice 5 – Tangente à la courbe d'un quotient

Soit $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$ sur $]-1\,;+\infty[$. Déterminer la tangente T au point d'abscisse 0, puis montrer que $f(x) - (3x - 1) = \dfrac{-3x^2}{x + 1}$ et conclure sur la position de la courbe par rapport à T.

Exercice 6 – Tangentes passant par l'origine

Déterminer les tangentes à la courbe de $f(x) = x^2 + 2x + 4$ qui passent par l'origine du repère, et préciser les points de contact.

Exercice 7 – Approximations près de 1

a) Déterminer les fonctions affines tangentes en 1 aux fonctions carré, inverse et racine carrée, et en déduire des approximations de $(1 + h)^2$, $\dfrac{1}{1 + h}$ et $\sqrt{1 + h}$ pour h proche de 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Comparer, pour $h = 0{,}1$ puis $h = 0{,}01$, les valeurs exactes et les approximations.

Exercice 8 – Approximation d'un calcul

Estimer $2{,}98^3$ à l'aide de la fonction affine tangente à $x \mapsto x^3$ en 3, puis comparer avec la valeur exacte. Faire de même pour $2{,}8^3$ et commenter.

Exercice 9 – Position relative de deux courbes

Étudier la position relative des courbes de $f(x) = x^3$ et de la droite $g(x) = 4x - 3$. On vérifiera que $x^3 - 4x + 3 = (x-1)\left(x^2 + x - 3\right)$.

Exercice 10 – Tangente à une hyperbole

Déterminer la tangente à la courbe de $f(x) = \dfrac{2}{x}$ au point d'abscisse -1, puis étudier la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Exercice 11 – Deux courbes tangentes

Les courbes des fonctions $f(x) = x^2$ et $g(x) = -x^2 + 4x - 2$ ont-elles un point commun où elles admettent la même tangente ? Préciser la position des deux courbes par rapport à cette tangente.

Exercice 12 – Tangentes à l'hyperbole et aire d'un triangle

On considère la courbe de la fonction inverse $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ et un réel $a > 0$.

a) Montrer que la tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = -\dfrac{x}{a^2} + \dfrac{2}{a}$.

b) Déterminer les points où elle coupe les axes du repère.

c) Montrer que l'aire du triangle formé par cette tangente et les deux axes ne dépend pas de a.

Exercice 13 – Vitesse moyenne et vitesse instantanée

Une bille lâchée sans vitesse initiale parcourt, en t secondes, la distance $d(t) = 4{,}9t^2$ (en mètres).

a) Calculer la vitesse moyenne entre $t = 2$ et $t = 2 + h$ pour $h = 1$, $h = 0{,}1$ et $h = 0{,}01$.

b) Montrer que cette vitesse moyenne vaut $19{,}6 + 4{,}9h$, et en déduire la vitesse instantanée à $t = 2$.

c) Retrouver ce résultat avec la dérivée, puis écrire la fonction affine qui approche $d(t)$ au voisinage de $t = 2$.

Exercice 14 – Recherche d'un point de contact

Pour quelle valeur de k la droite $y = 4x + k$ est-elle tangente à la courbe de $f(x) = x^2 + 2$? Préciser le point de contact, puis discuter selon k le nombre de points communs à la droite et à la courbe.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : étude locale et globale

Soit $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 1}$ sur $]-1\,;+\infty[$.

a) Montrer que $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{(x+1)^2}$ et dresser le tableau de variations de f sur $]-1\,;+\infty[$.

b) Déterminer la tangente T au point d'abscisse 0.

c) Étudier la position relative de la courbe et de T.

d) En déduire que, pour tout $x > -1$, $\dfrac{x^2 - 2x}{x + 1} \geq -2x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).