MATHÉMATIQUES

Dérivation et étude des fonctions

Première spé maths

Fonction dérivée • Dérivées usuelles • x^n, $n \in \mathbb{Z}$ • Racine carrée
Somme • Produit • Inverse • Quotient • Dérivabilité • Valeur absolue

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement de spécialité de mathématiques de première générale** (arrêté du 26 février 2026, BO n°14 du 2 avril 2026, rentrée 2026), partie « Analyse », section « Dérivation », point de vue global. Il couvre :

- fonction dérivable sur un intervalle, fonction dérivée ;
- fonctions dérivées des fonctions carré, cube, inverse, racine carrée, et de $x \mapsto x^n$ pour n entier relatif ;
- opérations sur les fonctions dérivables : somme, produit, inverse, quotient ;
- fonction valeur absolue : étude de la dérivabilité en 0 ;
- **démonstrations** au programme : dérivée de la fonction carré, de la fonction inverse, d'un produit ; la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Le nombre dérivé et la tangente sont traités dans le chapitre « Dérivation locale » ; l'usage de la dérivée pour étudier les variations, dans « Variations et extremums ».

Objectif : calculer la fonction dérivée d'une fonction construite à partir des fonctions de référence, en choisissant la bonne règle, et connaître les cas où une fonction n'est pas dérivable.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Fonction dérivée **3**

2 Dérivées des fonctions de référence **3**

3 Fonctions non dérivables en un point **4**

4 Opérations sur les fonctions dérivables **4**

5 Utiliser la fonction dérivée **6**

6 Erreurs classiques **6**

7 Fiche de synthèse **7**

8 Exercices d'application **7**

9 Corrigés des exercices **7**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Fonction dérivée

Fonction dérivable sur un intervalle

Une fonction f est **dérivable sur un intervalle** I si elle est dérivable en tout réel a de I, c'est-à-dire si, pour tout $a \in I$, le taux de variation $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre réel $f'(a)$ quand h tend vers 0. La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est la **fonction dérivée** de f sur I.

Ce que mesure f'

$f'(x)$ est la pente de la tangente à la courbe au point d'abscisse x : c'est la vitesse de variation de f en x (vitesse instantanée, coût marginal…).

2. Dérivées des fonctions de référence

Tableau des dérivées

Fonction $f(x)$	**Dérivée $f'(x)$**	**Ensemble de dérivabilité**
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
$mx+p$	m	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$
x^n, n entier ≥ 1	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$
x^n, n entier ≤ -1	nx^{n-1}	$]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$

Fonction carré. Pour a réel et $h \neq 0$:

$$\frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h,$$

qui tend vers $2a$ quand h tend vers 0. Donc la fonction carré est dérivable en tout a et $f'(a) = 2a$.

Fonction inverse. Pour $a \neq 0$ et $h \neq 0$ assez petit pour que $a+h \neq 0$:

$$\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{a-(a+h)}{h\,a(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)},$$

qui tend vers $-\dfrac{1}{a^2}$ quand h tend vers 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Puissances d'exposant entier relatif

$(x^5)' = 5x^4$; $\left(x^{-3}\right)' = -3x^{-4} = -\dfrac{3}{x^4}$ pour $x \neq 0$; $\left(\dfrac{1}{x^2}\right)' = \left(x^{-2}\right)' = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$.

3. Fonctions non dérivables en un point

Racine carrée en 0

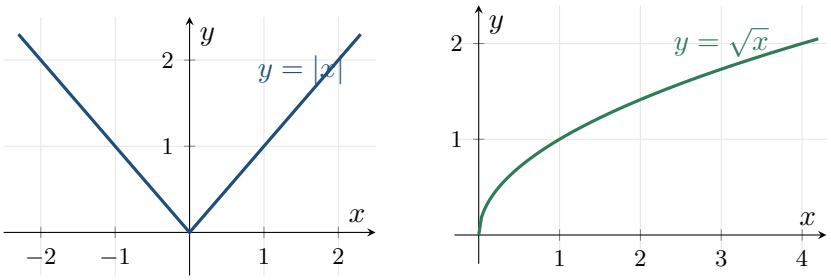
La fonction racine carrée est définie en 0 mais **n'est pas dérivable en** 0.

Démonstration. Pour $h > 0$, le taux de variation en 0 vaut $\dfrac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$. Quand h se rapproche de 0, ce nombre devient aussi grand que l'on veut ($\frac{1}{\sqrt{0{,}0001}} = 100$, $\frac{1}{\sqrt{0{,}000\,001}} = 1\,000\ldots$) : il ne tend pas vers un nombre réel. La courbe a une tangente **verticale** à l'origine.

Valeur absolue en 0

La fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

Démonstration. Le taux de variation en 0 vaut $\dfrac{|h|}{h}$, égal à 1 si $h > 0$ et à -1 si $h < 0$. Il ne se rapproche pas d'un unique nombre quand h tend vers 0. Graphiquement, la courbe présente un « angle » en 0 : deux demi-tangentes de pentes -1 et 1.



Deux courbes sans tangente « ordinaire » à l'origine : un angle pour $|x|$, une tangente verticale pour $\sqrt{x}$.

4. Opérations sur les fonctions dérivables

Règles de dérivation

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Fonction	Dérivée	Condition
Somme $u+v$	$u'+v'$	
Produit par une constante ku	ku'	
Produit uv	$u'v+uv'$	
Inverse $\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I
Quotient $\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I

Dérivée d'un produit. Soit $a \in I$ et $h \neq 0$. On fait apparaître les taux de variation de u et de v :

$$\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h} \times v(a+h) + u(a) \times \frac{v(a+h)-v(a)}{h}.$$

(On a ajouté et retranché $u(a)v(a+h)$.) Quand h tend vers 0, les deux taux tendent vers $u'(a)$ et $v'(a)$, et $v(a+h)$ tend vers $v(a)$ (on admet ce dernier point, qui résulte de la dérivabilité de v). La limite vaut $u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$.

Le produit ne se dérive pas facteur par facteur

$(uv)' \neq u'v'$: avec $u(x)=v(x)=x$, $(x\times x)'=2x$ alors que $u'v'=1$. De même, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' \neq \dfrac{u'}{v'}$.

Choisir la règle

1. Repérer la **dernière opération** : somme, produit, quotient.
2. Nommer les fonctions u et v et calculer u' et v' à part.
3. Appliquer la formule, puis simplifier : factoriser le numérateur d'un quotient prépare l'étude du signe.
4. Préciser l'ensemble sur lequel le calcul est valable (valeurs interdites, racine carrée).

Polynôme

$f(x)=3x^4-2x^2+5x-1$: par somme et produit par une constante, $f'(x)=12x^3-4x+5$.

Produit avec une racine

$g(x)=(2x+1)\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$. Avec $u=2x+1$, $u'=2$, $v=\sqrt{x}$, $v'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$:

$$g'(x) = 2\sqrt{x} + (2x+1)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x+2x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{6x+1}{2\sqrt{x}}.$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Quotient

$h(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$ sur $]-\infty\,;2[$ et sur $]2\,;+\infty[$. Avec $u = x^2+1$, $u' = 2x$, $v = x-2$, $v' = 1$:

$$h'(x) = \frac{2x(x-2)-(x^2+1)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-1}{(x-2)^2}.$$

Inverse

$k(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$ sur $\mathbb{R}$ (le dénominateur ne s'annule pas) : $k'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$.

5. Utiliser la fonction dérivée

Tangente et approximation affine

La tangente au point d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$, et pour h petit, $f(a+h) \approx f(a)+f'(a)h$.

Pour $f(x) = \sqrt{x}$ en $a = 4$: $f(4) = 2$, $f'(4) = \frac{1}{4}$, d'où la tangente $y = \frac{1}{4}(x-4)+2$ et l'approximation $\sqrt{4{,}1} \approx 2 + \frac{1}{4}\times 0{,}1 = 2{,}025$ (valeur exacte $\approx 2{,}024\,8$).

Variations

Le signe de f' donne le sens de variation de f : c'est l'objet du chapitre « Variations et extremums ». C'est pourquoi on cherche une dérivée **factorisée**.

6. Erreurs classiques

À éviter

- $(uv)' = u'v'$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$: faux.
- Oublier le signe moins dans $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ou dans $u'v - uv'$ (l'ordre compte dans un quotient).
- Dériver $\sqrt{x}$ en 0 : elle n'y est pas dérivable.
- Oublier l'ensemble de dérivabilité (valeurs interdites).
- Dériver une constante en elle-même : $(5)' = 0$, et $(5x)' = 5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

7. Fiche de synthèse

Référence	$(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$
Somme, constante	$(u+v)' = u' + v'$; $(ku)' = ku'$
Produit	$(uv)' = u'v + uv'$
Inverse, quotient	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Non dérivables	$\sqrt{x}$ en 0 (tangente verticale) ; $\lvert x\rvert$ en 0 (angle)
Tangente	$y = f'(a)(x-a) + f(a)$

8. Exercices d'application

Exercice 1 – Dérivées usuelles

Dériver : a) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7$; b) $g(x) = x^{-2} + 3x$; c) $h(x) = 6\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 2 – Produits

Dériver et simplifier : a) $f(x) = (x^2+1)(3x-2)$; b) $g(x) = x\sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 3 – Quotients

Dériver : a) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ sur $]1\,;+\infty[$; b) $g(x) = \dfrac{5}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 – Démonstration

Démontrer, avec le taux de variation, que la fonction $f(x) = x^3$ a pour dérivée $f'(x) = 3x^2$ (on développera $(a+h)^3$).

9. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. a) $f'(x) = 12x^2 - 10x$. b) $g'(x) = -2x^{-3} + 3 = -\dfrac{2}{x^3} + 3$ (pour $x \neq 0$). c) $h'(x) = 6 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3}{\sqrt{x}}$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. a) $f'(x) = 2x(3x-2) + 3(x^2+1) = 6x^2 - 4x + 3x^2 + 3 = 9x^2 - 4x + 3$. b) $g'(x) = \sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. a) $f'(x) = \dfrac{2(x-1) - (2x+3)}{(x-1)^2} = \dfrac{-5}{(x-1)^2}$. b) $g = 5 \times \dfrac{1}{v}$ avec $v = x^2+1$: $g'(x) = 5 \times \left(-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\right) = -\dfrac{10x}{(x^2+1)^2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $(a+h)^3 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3$, donc $\dfrac{(a+h)^3 - a^3}{h} = 3a^2 + 3ah + h^2$, qui tend vers $3a^2$ quand h tend vers 0. Donc $f'(a) = 3a^2$ pour tout réel a.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).