

Plaquette 2 - Calcul de dérivées

Dérivation locale — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dérivées des fonctions de référence.

$f(x)$	k	x	x^2	x^3	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	0	1	$2x$	$3x^2$	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Ensembles de dérivabilité. Un polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$; $\frac{1}{x}$ l'est sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] 0 ; +\infty [$; $\sqrt{x}$ est dérivable sur $] 0 ; +\infty [$ **seulement** — pas en 0.

Opérations de base.

$$(u + v)' = u' + v' \quad (ku)' = k u'$$

Méthode pour un polynôme. On dérive terme à terme : chaque ax^n donne nax^{n-1} , et la constante disparaît.

Avant de dériver, on simplifie. Un produit se développe, un quotient se coupe en morceaux quand c'est possible :

$$\frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

Ce que f' sert à trouver.

- **tangente horizontale** : résoudre $f'(x) = 0$;
- **sens de variation** : étudier le **signe** de $f'(x)$;
- **pente en un point** : calculer $f'(a)$.

Correction de l'exercice 1 - Les formules de référence

On applique le tableau des dérivées usuelles.

a) $f(x) = x^4$ est un polynôme, dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = 4x^3$$

b) $g(x) = \frac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $] -\infty ; 0[$ et sur $] 0 ; +\infty [$:

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

c) $h(x) = \sqrt{x}$ est définie sur $] 0 ; +\infty [$ mais dérivable seulement sur $] 0 ; +\infty [$:

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

d) k est constante, donc $k'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Le piège du c). En 0, le taux d'accroissement de $\sqrt{x}$ devient infiniment grand : la courbe y a une tangente **verticale**, et la fonction n'est pas dérivable en ce point.

Réponse. a) $4x^3$ — b) $-\frac{1}{x^2}$ — c) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ — d) 0.

Correction de l'exercice 2 - Dériver un trinôme

On dérive **terme à terme**, en utilisant $(ku)' = k u'$ et $(u + v)' = u' + v'$:

$$f'(x) = 3 \times 2x - 5 \times 1 + 0 = 6x - 5$$

— **Valeur en 2** : $f(2) = 12 - 5 = 7$.

Interprétation. La tangente à la courbe au point d'abscisse 2 a pour coefficient directeur 7 : la courbe y monte fortement.

— **Contrôle par le taux d'accroissement** : $f(2) = 12 - 10 + 4 = 6$ et $f(2,01) = 3 \times 4,0401 - 10,05 + 4 = 6,0703$, d'où un taux de $\frac{0,0703}{0,01} = 7,03$, très proche de 7 ✓

Erreur classique. La constante +4 disparaît : elle translate la courbe verticalement sans changer sa pente.

Réponse. $f'(x) = 6x - 5$ et $f(2) = 7$.

Correction de l'exercice 3 - Un polynôme de degré 3

— **Dérivée**, terme à terme :

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

— **Équation** $f'(x) = 0$: on peut diviser par 3.

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

— **Discriminant** : $\Delta = 16 - 12 = 4$, $\sqrt{\Delta} = 2$, racines $\frac{4 \pm 2}{2}$, soit 1 et 3.

La dérivée s'annule en $x = 1$ et $x = 3$: la courbe de f y admet des tangentes **horizontales**.

— **Valeurs correspondantes** : $f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$ et $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$.

Les points à tangente horizontale sont donc $(1; 4)$ et $(3; 0)$ — un maximum local et un minimum local, ce que confirmera l'étude du signe de f' .

Réponse. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; $f'(x) = 0$ pour $x = 1$ et $x = 3$.

Correction de l'exercice 4 - Avec un coefficient négatif

On dérive chaque terme, en conservant les signes :

$$g'(x) = -2 \times 3x^2 + 2x - 0 = -6x^2 + 2x$$

— **Forme factorisée**, utile pour la suite : $g'(x) = 2x(-3x + 1)$.

— **Racines de g'** : $x = 0$ et $x = \frac{1}{3}$.

— **Signe** : le trinôme $-6x^2 + 2x$ a un coefficient dominant négatif, il est donc positif **entre** ses racines.

Intervalle	$] -\infty ; 0[$	$] 0 ; \frac{1}{3}[$	$] \frac{1}{3} ; +\infty [$
Signe de $g'(x)$	−	+	−

— **Contrôle** : $g'(1) = -6 + 2 = -4 < 0$ ✓ et $g'\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} > 0$ ✓

Réponse. $g'(x) = -6x^2 + 2x = 2x(1 - 3x)$.

Correction de l'exercice 5 - Des coefficients fractionnaires

On réécrit chaque terme sous la forme kx^n avant de dériver :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 5$$

- Dérivée du premier terme : $\frac{1}{3} \times 3x^2 = x^2$.
- Dérivée du deuxième : $-\frac{1}{2} \times 2x = -x$.
- Dérivée du troisième : 2. La constante donne 0.

$$f'(x) = x^2 - x + 2$$

Bonus : le signe. Le discriminant de $x^2 - x + 2$ vaut $1 - 8 = -7 < 0$, et le coefficient dominant est positif : $f'(x) > 0$ pour tout réel x . La fonction f est donc **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Astuce. Les coefficients $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$ ont été choisis pour « tomber juste » à la dérivation : c'est fréquent dans les sujets, ce n'est pas un hasard.

Réponse. $f(x) = x^2 - x + 2$, strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 6 - Une somme avec un inverse

a) On dérive terme à terme, avec $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

b) On résout sur $]0; +\infty[$:

$$1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1$$

- Donc $x = 1$ ou $x = -1$; seule $x = 1$ appartient à l'intervalle d'étude.
- **Valeur correspondante** : $f(1) = 1 + 1 = 2$.

Mise en forme utile. En réduisant au même dénominateur :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Comme $x^2 > 0$, le signe de f est celui de $x^2 - 1$: négatif sur $]0; 1[$, positif ensuite. La fonction admet donc un **minimum** égal à 2 en $x = 1$.

Réponse. a) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ — b) $x = 1$.

Correction de l'exercice 7 - Une somme avec une racine

— **Dérivée** :

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3$$

— **Signe** : pour $x > 0$, $\sqrt{x} > 0$, donc $\frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$. En ajoutant 3, on obtient

$$g'(x) > 3 > 0$$

— La dérivée est strictement positive : g est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$.

Remarque sur le bord. En 0, g n'est pas dérivable (le terme $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ n'a pas de sens), mais

elle y est bien définie : $g(0) = 0$. La courbe démarre avec une tangente verticale.

— **Contrôle** : $g(1) = 4$, $g(4) = 2 + 12 = 14$, $g(9) = 3 + 27 = 30$: les valeurs augmentent ✓

Réponse. $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 > 0$: g est strictement croissante.

Correction de l'exercice 8 - Développer avant de dériver

Développement.

$$f(x) = (2x - 1)(x + 3) = 2x^2 + 6x - x - 3 = 2x^2 + 5x - 3$$

— **Dérivée** du trinôme obtenu :

$$f'(x) = 4x + 5$$

— **Valeur remarquable** : $f'(x) = 0$ pour $x = -\frac{5}{4}$, abscisse du sommet de la parabole.

— **Contrôle** : le sommet d'un trinôme a pour abscisse $-\frac{b}{2a} = -\frac{5}{4}$ ✓ — la dérivée retrouve la formule du chapitre sur le second degré.

Pourquoi développer ? Pour un produit de deux facteurs du premier degré, développer est plus rapide et moins risqué que la formule $(uv)' = u'v + uv'$. On garde celle-ci pour les cas où le développement est pénible.

Réponse. $f'(x) = 4x + 5$.

Correction de l'exercice 9 - Simplifier un quotient avant de dériver

Simplification. On coupe le quotient en deux :

$$f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x}$$

— **Dérivée** :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

— **Contrôle numérique** : $f(2) = 2,5$ et $f(2,01) \approx 2,5075$, soit un taux d'environ 0,75 ; or $f'(2) = 1 - \frac{1}{4} = 0,75$ ✓

Méthode. Un quotient dont le **dénominateur est un monôme** se coupe toujours en une somme : on évite ainsi la formule du quotient et ses erreurs de signe.

Attention. $\frac{x^2 + 1}{x}$ n'est **pas** égal à $x + 1$: on divise chaque terme du numérateur, pas seulement le premier.

Réponse. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

Correction de l'exercice 10 - Calculer une pente précise

— **Dérivée** :

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

— **En 2** : $f'(2) = 3 \times 4 - 4 = 8$.

— **En -2** : $f'(-2) = 3 \times 4 - 4 = 8$.

Les deux nombres dérivés sont **égaux** : les tangentes aux points d'abscisses 2 et -2 sont **parallèles**.

Pourquoi ? La dérivée $3x^2 - 4$ ne dépend que de x^2 : elle prend la même valeur en x et

en $-x$. En revanche $f(2) = 0$ et $f(-2) = 0$: les deux points sont distincts, les tangentes sont donc deux droites parallèles distinctes.

— **Contrôle** : $f(0) = -4 < 0$, $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 8 > 0$: la dérivée change bien de signe entre 1 et 2.

Réponse. $f(2) = f(-2) = 8$: les tangentes sont parallèles.

Correction de l'exercice 11 - Où la tangente est-elle horizontale ?

Une tangente est horizontale lorsque son coefficient directeur est nul, c'est-à-dire lorsque

$$f'(x) = 0$$

— **Dérivée** : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$.

— **Racines** : $x = 1$ et $x = -1$.

— **Ordonnées** : $f(1) = 1 - 3 = -2$ et $f(-1) = -1 + 3 = 2$.

Les points cherchés sont $(1; -2)$ et $(-1; 2)$.

Signe de f' : le trinôme $3(x - 1)(x + 1)$ est positif à l'extérieur de $[-1; 1]$.

Intervalle	$] -\infty; -1[$	$] -1; 1[$	$] 1; +\infty[$
Signe de $f'(x)$	+	-	+

La courbe monte, descend, puis remonte : $(-1; 2)$ est un **maximum local** et $(1; -2)$ un **minimum local**.

Réponse. Points $(-1; 2)$ et $(1; -2)$.

Correction de l'exercice 12 - Le signe de la dérivée

— **Dérivée** :

$$f'(x) = 2x - 6 = 2(x - 3)$$

— C'est une fonction **affine**, qui s'annule en 3 et change de signe en ce point.

Intervalle	$] -\infty; 3[$	$] 3; +\infty[$
Signe de $f'(x)$	-	+
Variation de f	décroissante	croissante

— f est donc décroissante sur $] -\infty; 3[$ et croissante sur $] 3; +\infty[$.

— Elle admet un **minimum** en $x = 3$, valant $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$.

Cohérence avec le second degré. La forme canonique donne $f(x) = (x - 3)^2 - 4$: même sommet, même minimum. La dérivée retrouve, en une ligne, ce que la forme canonique donnait au chapitre 1.

Réponse. $f'(x) = 2(x - 3)$: f décroît puis croît, minimum -4 en $x = 3$.

Correction de l'exercice 13 - Retrouver un coefficient

— **Dérivée** en fonction de a :

$$f'(x) = 2ax + 3$$

— **Condition imposée** : $f'(1) = 5$, donc $2a \times 1 + 3 = 5$.

— On résout : $2a = 2$, d'où

$$a = 1$$

— **Vérification** : avec $a = 1$, $f(x) = x^2 + 3x$ et $f'(x) = 2x + 3$, donc $f'(1) = 5$ ✓

Méthode générale. Une condition sur une tangente (pente imposée, tangente horizontale, tangente parallèle à une droite) se traduit **toujours** par une équation portant sur f' . On exprime la dérivée avec le paramètre, on écrit l'équation, on résout.

Réponse. $a = 1$.

Correction de l'exercice 14 - Deux méthodes, un seul résultat

Méthode 1 — en développant.

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad \text{donc} \quad f'(x) = 2x - 2$$

Méthode 2 — avec la formule de la puissance. On pose $u(x) = x - 1$, d'où $u'(x) = 1$:

$$(u^2)' = 2u'u = 2 \times 1 \times (x - 1) = 2(x - 1)$$

— Les deux résultats coïncident : $2(x - 1) = 2x - 2$ ✓

Quelle méthode choisir ? Ici les deux se valent. Mais pour $(3x - 5)^7$, développer est impossible en pratique : la formule $(u^n)' = n u' u^{n-1}$ devient indispensable.

Contrôle du résultat. $f'(1) = 0$: la courbe, qui est une parabole de sommet $(1 ; 0)$, y a bien une tangente horizontale ✓

Réponse. $f'(x) = 2(x - 1) = 2x - 2$ par les deux méthodes.

Correction de l'exercice 15 - Le coût marginal de l'atelier

a) On dérive terme à terme :

$$C'(q) = 0,03q^2 - 1,2q + 13$$

— b) $C'(20) = 0,03 \times 400 - 24 + 13 = 12 - 24 + 13 = 1$.

— Le coût marginal vaut 1 € : produire le 21^e objet coûte environ 1 € de plus.

— **Contrôle** : $C(20) = 80 - 240 + 260 = 100$ et $C(21) = 92,61 - 264,6 + 273 = 101,01$, soit une hausse de 1,01 € ✓

— c) C' est un trinôme de coefficient dominant $0,03 > 0$: son minimum est atteint au sommet.

$$q = -\frac{-1,2}{2 \times 0,03} = \frac{1,2}{0,06} = 20$$

— Le coût marginal minimal vaut donc $C'(20) = 1$ €, pour une production de 20 objets.

Interprétation économique. Jusqu'à 20 objets, chaque unité supplémentaire coûte de moins en moins cher — effet d'échelle ; au-delà, le coût marginal remonte : l'atelier sature.

Réponse. a) $C'(q) = 0,03q^2 - 1,2q + 13$ — b) $C'(20) = 1$ € — c) minimal pour $q = 20$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : dériver puis conclure

a) **Dérivée** :

$$f(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2)$$

— Le trinôme a pour discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, donc pour racines $\frac{3 \pm 1}{2}$, soit 1 et 2 :

$$f(x) = 6(x - 1)(x - 2)$$

b) Coefficient dominant positif : f' est positive à l'extérieur de $[1 ; 2]$.

Intervalle	$] -\infty ; 1[$	$] 1 ; 2[$	$] 2 ; +\infty[$
Signe de $f'(x)$	+	-	+
Variation de f	croissante	décroissante	croissante

c) f croît puis décroît : elle admet un **maximum local** en $x = 1$, valant

$$f(1) = 2 - 9 + 12 - 4 = 1$$

— Elle décroît puis croît : elle admet un **minimum local** en $x = 2$, valant

$$f(2) = 16 - 36 + 24 - 4 = 0.$$

— **Contrôle** : $f(0) = -4 < 1$ et $f(3) = 54 - 81 + 36 - 4 = 5 > 0$ ✓ — les valeurs encadrent bien les extremums.

Réponse. a) $f(x) = 6(x - 1)(x - 2)$ — c) maximum local 1 en $x = 1$, minimum local 0 en $x = 2$.