

Plaquette 3 - Équation de tangente

Dérivation locale — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

On y lit tout : le **coefficient directeur** est $f'(a)$, et la droite **passse par** le point $A(a; f(a))$.

Les quatre questions classiques.

- **1. Tangente en a** : calculer $f'(a)$, puis $f(a)$, puis appliquer la formule et développer.
- **2. Tangente horizontale** : résoudre $f'(x) = 0$.
- **3. Tangente parallèle** à la droite $y = mx + p$: résoudre $f'(x) = m$ (deux droites parallèles ont le même coefficient directeur).
- **4. Tangente passant par un point B extérieur** à la courbe : écrire la tangente au point d'abscisse a (inconnue), puis traduire « elle passe par B » — on obtient une équation en a .

Position relative de la courbe et de sa tangente. On étudie le signe de

$$d(x) = f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)]$$

Cette différence s'annule toujours en a : elle se factorise donc par $(x - a)$, souvent par $(x - a)^2$.

Approximation affine. Pour h petit :

$$f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$$

C'est la tangente qui remplace la courbe au voisinage de a .

Correction de l'exercice 1 - La formule, appliquée telle quelle

On applique la formule du cours :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \quad \text{avec } a = 3$$

- **Valeur de la fonction** : $f(3) = 9$.
- **Dérivée** : $f'(x) = 2x$, donc $f'(3) = 6$.
- **Substitution** : $y = 6(x - 3) + 9$.
- **Développement** : $y = 6x - 18 + 9 = 6x - 9$.

$$T: y = 6x - 9$$

- **Contrôle** : pour $x = 3$, la tangente donne $18 - 9 = 9$, qui est bien $f(3)$ ✓ — une tangente passe toujours par son point de contact.

Erreur fréquente. Écrire $y = 6x + 9$: le $+f(a)$ s'ajoute **après** avoir développé $f'(a)(x - a)$, il ne remplace pas -18 .

Réponse. $y = 6x - 9$.

Correction de l'exercice 2 - Tangente à une cubique

- **Valeur** : $f(1) = 1 - 2 = -1$.
- **Dérivée** : $f'(x) = 3x^2 - 2$, donc $f'(1) = 3 - 2 = 1$.
- **Formule** :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 1 \times (x - 1) + (-1)$$

- **Développement** : $y = x - 1 - 1 = x - 2$.

$$T: y = x - 2$$

- **Contrôle du point de contact** : la tangente donne $1 - 2 = -1 = f(1)$ ✓
- **Contrôle de la pente** : le coefficient directeur 1 est bien $f'(1)$ ✓

Lecture. La tangente monte doucement (pente 1) : au voisinage de $x = 1$, la courbe se comporte comme la droite $y = x - 2$.

Réponse. $y = x - 2$.

Correction de l'exercice 3 - Tangente à l'hyperbole

- **Valeur** : $f(2) = \frac{1}{2}$.
- **Dérivée** : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc

$$f'(2) = -\frac{1}{4}$$

- **Formule** : $y = -\frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{2}$.
- **Développement** : $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x + 1$.

$$T: y = -\frac{1}{4}x + 1$$

- **Contrôle** : pour $x = 2$, la tangente donne $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} = f(2)$ ✓

Cohérence. La fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$: sa dérivée est négative partout, et la tangente descend bien.

Réponse. $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

Correction de l'exercice 4 - Tangente à la racine carrée

- **Valeur** : $g(4) = 2$.
- **Dérivée** : $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc

$$g'(4) = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

- **Formule** : $y = \frac{1}{4}(x - 4) + 2$.
- **Développement** : $y = \frac{1}{4}x - 1 + 2 = \frac{1}{4}x + 1$.

$$T: y = \frac{1}{4}x + 1$$

- **Contrôle** : pour $x = 4$, on obtient $1 + 1 = 2 = g(4)$ ✓

Une remarque utile. La courbe de la racine carrée est **sous** sa tangente : pour $x = 9$, la tangente donne 3,25 alors que $g(9) = 3$. C'est vrai en tout point, et c'est ce qui rend

l'approximation affine toujours légèrement excédentaire ici.

Réponse. $y = \frac{1}{4}x + 1$.

Correction de l'exercice 5 - Chercher une tangente horizontale

Une tangente horizontale a un coefficient directeur nul :

$$f'(x) = 0$$

- **Dérivée** : $f'(x) = 2x - 6$.
- **Équation** : $2x - 6 = 0$, donc $x = 3$.
- **Ordonnée** : $f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$.
- **Équation de la tangente** : $y = 0 \times (x - 3) + (-4)$, soit

$$T: y = -4$$

Le point de contact est $S(3; -4)$: c'est le **sommet** de la parabole, et la tangente y est la droite horizontale d'équation $y = -4$.

Lien avec le second degré. La forme canonique $f(x) = (x - 3)^2 - 4$ donne le même sommet : la dérivée et la forme canonique se confirment mutuellement.

Réponse. Point $S(3; -4)$, tangente $y = -4$.

Correction de l'exercice 6 - Tangente parallèle à une droite

Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le **même coefficient directeur**. On cherche donc x tel que :

$$f'(x) = 3$$

- **Dérivée** : $f'(x) = 2x - 1$.
- **Équation** : $2x - 1 = 3$, donc $2x = 4$ et $x = 2$.
- **Ordonnée** : $f(2) = 4 - 2 = 2$.
- **Tangente** : $y = 3(x - 2) + 2 = 3x - 6 + 2 = 3x - 4$.

$$T: y = 3x - 4$$
- **Contrôle** : T a bien pour coefficient directeur 3, comme la droite donnée, et elle passe par $(2; 2)$ ✓
- Les deux droites sont **distinctes** ($-4 \neq 1$) : elles sont donc strictement parallèles.

Méthode à retenir. « Parallèle à » se traduit toujours par une **équation sur f'** , jamais sur f .

Réponse. Point $(2; 2)$, tangente $y = 3x - 4$.

Correction de l'exercice 7 - Deux tangentes de même pente

- **Dérivée** : $f'(x) = 3x^2$.
- **Condition** :

$$3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

- **Premier point** : $f(1) = 1$, d'où $y = 3(x - 1) + 1 = 3x - 2$.
- **Second point** : $f(-1) = -1$, d'où $y = 3(x + 1) - 1 = 3x + 2$.

$$T_1: y = 3x - 2 \quad T_2: y = 3x + 2$$

- **Contrôle** : les deux droites ont le même coefficient directeur 3 mais des ordonnées à l'origine différentes : elles sont parallèles et distinctes ✓

Le piège. Répondre une seule tangente. L'équation $f(x) = m$ est ici du second degré : elle peut avoir **deux** solutions, et il faut les traiter toutes les deux.

Réponse. $y = 3x - 2$ (en $x = 1$) et $y = 3x + 2$ (en $x = -1$).

Correction de l'exercice 8 - Lire l'équation d'une tangente

a) **Coefficient directeur** de la droite (AB) :

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1 - 5}{2 - 0} = \frac{-4}{2} = -2$$

— **Ordonnée à l'origine** : la droite passe par $B(0; 5)$, donc $p = 5$.

$$T: y = -2x + 5$$

— **Contrôle** : pour $x = 2$, $-4 + 5 = 1 = y_A$ ✓

— b) La tangente **passer par le point de contact** A, donc $f(2) = 1$.

— Son coefficient directeur est le nombre dérivé :

$$f'(2) = -2$$

À retenir. Une tangente tracée sur un graphique donne **deux** informations d'un coup : la valeur de la fonction (par le point de contact) et celle de la dérivée (par la pente).

Réponse. a) $y = -2x + 5$ — b) $f(2) = 1$ et $f'(2) = -2$.

Correction de l'exercice 9 - Une tangente issue d'un point extérieur

On écrit la tangente en un point d'abscisse a inconnue.

— $f(a) = a^2$ et $f'(a) = 2a$, donc :

$$T_a: y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - 2a^2 + a^2 = 2ax - a^2$$

— **On traduit** « T_a passe par $B(0; -1)$ » : on remplace x par 0 et y par -1 .

$$-1 = 2a \times 0 - a^2 \Leftrightarrow -1 = -a^2 \Leftrightarrow a^2 = 1$$

— Donc $a = 1$ ou $a = -1$.

— **Pour** $a = 1$: $y = 2x - 1$. **Pour** $a = -1$: $y = -2x - 1$.

Il y a donc **deux** tangentes issues de B : $y = 2x - 1$ et $y = -2x - 1$.

— **Contrôle** : les deux droites passent par $(0; -1)$ ✓, et $x^2 - (2x - 1) = (x - 1)^2$ ne s'annule qu'en 1 : il y a bien contact simple ✓

Attention à la rédaction. B n'est **pas** le point de contact : on ne peut pas écrire la tangente « en B ». L'inconnue est l'abscisse a du point de contact.

Réponse. $y = 2x - 1$ et $y = -2x - 1$.

Correction de l'exercice 10 - La courbe et sa tangente

a) $f(1) = 1$ et $f(x) = 3x^2$, donc $f'(1) = 3$.

$$T: y = 3(x - 1) + 1 = 3x - 2$$

b) On étudie le signe de la différence :

$$d(x) = x^3 - (3x - 2) = x^3 - 3x + 2$$

— **Racine évidente** : $d(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ — c'était attendu, la courbe touche sa tangente en $x = 1$.

— **Factorisation** : $d(x) = (x - 1)(x^2 + x - 2)$, et $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$, donc

$$d(x) = (x - 1)^2(x + 2)$$

— **Signe** : $(x - 1)^2 \geq 0$, donc le signe de d est celui de $x + 2$.

Intervalle	$] -\infty ; -2[$	$] -2 ; +\infty[$
Signe de $d(x)$	—	+

La courbe est **en dessous** de T pour $x < -2$, **au-dessus** pour $x > -2$, avec contact en $x = 1$ et traversée en $x = -2$.

— **Contrôle** : $f(-3) = -27$ et $T(-3) = -11$: la courbe est bien en dessous ✓

Réponse. a) $y = 3x - 2$ — b) courbe au-dessus de T sur $] -2 ; +\infty[$, en dessous avant.

Correction de l'exercice 11 - Calculer une racine de tête

Approximation affine. Au voisinage de a , la courbe se confond presque avec sa tangente :

$$g(a + h) \approx g(a) + h g'(a)$$

— Ici $a = 4$, $h = 0,04$, $g(4) = 2$ et $g'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

— **Calcul** :

$$\sqrt{4,04} \approx 2 + 0,04 \times \frac{1}{4} = 2 + 0,01 = 2,01$$

— **Valeur réelle** : $\sqrt{4,04} = 2,009975\dots$

— **Erreur** : environ 0,000025, soit moins d'un cent-millième : l'approximation est excellente.

Pourquoi c'est si précis. La courbe de $\sqrt{x}$ est très peu courbée en $x = 4$, et h est petit. L'erreur augmente vite si l'on s'éloigne : pour $\sqrt{5}$, la tangente donnerait 2,25 contre 2,236 réellement.

Sens de l'écart. La courbe étant sous sa tangente, l'approximation est toujours **par excès** ici.

Réponse. $\sqrt{4,04} \approx 2,01$, avec une erreur d'environ $2,5 \times 10^{-5}$.

Correction de l'exercice 12 - Tangente à l'intersection avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection avec l'axe des ordonnées a pour abscisse 0 : on travaille donc en $a = 0$.

— **Ordonnée** : $f(0) = 3$. Le point est $A(0 ; 3)$.

— **Dérivée** : $f(x) = 2x + 2$, donc $f'(0) = 2$.

— **Tangente** :

$$y = 2(x - 0) + 3 = 2x + 3$$

$$T: y = 2x + 3$$

— **Contrôle** : la tangente coupe elle aussi l'axe des ordonnées en 3 ✓ — c'est normal, elle passe par A .

Remarque pratique. En $a = 0$, la formule se simplifie : l'équation de la tangente est toujours

$$y = f'(0)x + f(0)$$

autrement dit, $f(0)$ est l'ordonnée à l'origine et $f'(0)$ la pente.

Réponse. $y = 2x + 3$.

Correction de l'exercice 13 - L'angle de tir

On note $f(x) = -0,05x^2 + x$, de dérivée $f'(x) = -0,1x + 1$.

a) **Au départ** : $f'(0) = 1$. La trajectoire part avec une pente de 1, c'est-à-dire un angle de 45° avec l'horizontale.

b) **Trajectoire horizontale** : $f(x) = 0$ donne $-0,1x + 1 = 0$, soit $x = 10$.

$$f(10) = -5 + 10 = 5$$

— Le sommet est le point $(10; 5)$: le ballon culmine à 5 m, à 10 m du lanceur.

— c) **Retour au sol** : $f(x) = 0$ donne $x(-0,05x + 1) = 0$, soit $x = 0$ ou $x = 20$. Le ballon retombe en $x = 20$, et

$$f'(20) = -2 + 1 = -1$$

— La pente vaut -1 : le ballon retombe avec le même angle qu'au départ, mais vers le bas.

Symétrie. Les pentes au départ et à l'arrivée sont opposées : c'est la symétrie de la parabole par rapport à la verticale du sommet.

Réponse. a) pente 1 — b) point $(10; 5)$ — c) pente -1 .

Correction de l'exercice 14 - Retrouver deux coefficients

La condition « tangente au point d'abscisse 1 » impose **deux** égalités :

— la courbe et la droite se **touchent** en $x = 1$: $f(1)$ est égal à l'ordonnée de la droite en 1 ;

— elles ont la **même pente** : $f'(1) = 3$.

Première équation. $f(x) = 2x + a$, donc $f(1) = 2 + a = 3$, d'où

$$a = 1$$

Seconde équation. La droite donne $y = 3 \times 1 - 1 = 2$, donc $f(1) = 2$:

$$1 + a + b = 2 \Leftrightarrow 1 + 1 + b = 2 \Leftrightarrow b = 0$$

Ainsi $f(x) = x^2 + x$.

— **Vérification** : $f(1) = 2$ ✓ ; $f'(x) = 2x + 1$ donne $f'(1) = 3$ ✓ ; et

$$f(x) - (3x - 1) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0 : \text{il y a bien contact en } x = 1 \text{ ✓}$$

À retenir. « Être tangente » se traduit **toujours** par deux conditions : même ordonnée et même pente.

Réponse. $a = 1$ et $b = 0$, soit $f(x) = x^2 + x$.

Correction de l'exercice 15 - Cette droite est-elle tangente ?

Méthode 1 — par l'intersection. On cherche les points communs :

$$x^2 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0$$

— L'équation a une **racine double** $x = 2$: la droite et la parabole n'ont qu'un seul point commun, $(2; 4)$. C'est la signature d'une tangence.

Méthode 2 — par la dérivée. Avec $f(x) = x^2$, on a $f'(x) = 2x$. La pente 4 impose $2x = 4$, donc $x = 2$. La tangente en ce point s'écrit :

$$y = 4(x - 2) + 4 = 4x - 4$$

C'est exactement la droite proposée : elle est donc bien tangente, au point $(2; 4)$.

Contrôle du signe. $x^2 - (4x - 4) = (x - 2)^2 \geq 0$: la parabole reste au-dessus de la droite, qu'elle touche sans la traverser ✓

À retenir. Une droite est tangente à une parabole **si et seulement si** l'équation d'intersection a un discriminant nul.

Réponse. Oui, avec contact en $(2; 4)$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : tangente d'une cubique

a) $f(1) = 1 - 3 = -2$ et $f'(x) = 3x^2 - 6x$, donc $f'(1) = 3 - 6 = -3$.

$$T: y = -3(x - 1) - 2 = -3x + 3 - 2 = -3x + 1$$

— b) $f(x) = 3x(x - 2) = 0$ donne $x = 0$ ou $x = 2$.

— $f(0) = 0$ et $f(2) = 8 - 12 = -4$: les points à tangente horizontale sont $(0; 0)$ et $(2; -4)$.

— c) On étudie la différence :

$$d(x) = x^3 - 3x^2 - (-3x + 1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

— On reconnaît une identité remarquable :

$$d(x) = (x - 1)^3$$

— **Contrôle** : $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ ✓

— Le cube a le signe de $x - 1$: $d(x) < 0$ pour $x < 1$ et $d(x) > 0$ pour $x > 1$.

La courbe est **en dessous** de T avant 1, **au-dessus** après : elle **traverse** sa tangente au point de contact. C'est un **point d'inflexion**.

Réponse. a) $y = -3x + 1$ — b) $(0; 0)$ et $(2; -4)$ — c) la courbe traverse T en $x = 1$.