

Plaquette 1 - Nombre dérivé et tangente

Dérivation locale — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ (avec $h \neq 0$) :

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est le **coefficient directeur de la sécante** passant par les points d'abscisses a et $a + h$.

Nombre dérivé. f est dérivable en a lorsque $\tau(h)$ tend vers un réel quand h tend vers 0 ; cette limite se note $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Interprétation géométrique. $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point d'abscisse a :

- $f'(a) > 0$: la tangente monte, la courbe croît au voisinage de a ;
- $f'(a) < 0$: la tangente descend ;
- $f'(a) = 0$: la tangente est **horizontale**.

Plus $f'(a)$ est grand, plus la courbe est raide.

Interprétations concrètes. Si $x(t)$ est une position, $x'(t)$ est la **vitesse instantanée** ; si $V(t)$ est un volume, $V'(t)$ est un **débit** ; si $C(q)$ est un coût, $C'(q)$ est le **coût marginal**.

Méthode de calcul, sans erreur : développer $f(a+h)$, soustraire $f(a)$, **factoriser** par h , simplifier, puis faire $h = 0$.

Correction de l'exercice 1 - Des sécantes de plus en plus proches

On applique la définition du taux d'accroissement entre deux valeurs :

$$\tau = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

a) $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = 4.$

b) $\frac{f(1,5) - f(1)}{0,5} = \frac{2,25 - 1}{0,5} = \frac{1,25}{0,5} = 2,5.$

c) $\frac{f(1,1) - f(1)}{0,1} = \frac{1,21 - 1}{0,1} = \frac{0,21}{0,1} = 2,1.$

d) Les taux 4, puis 2,5, puis 2,1 se rapprochent de 2 : on conjecture $f'(1) = 2$.

Ce que l'on voit. Chaque taux est la pente d'une **sécante** ; en rapprochant le second point du premier, les sécantes basculent vers la **tangente**, dont la pente est $f'(1)$.

Réponse. a) 4 — b) 2,5 — c) 2,1 — d) $f'(1) = 2$.

Correction de l'exercice 2 - Le nombre dérivé par la limite

On forme le taux d'accroissement entre 3 et $3 + h$, avec $h \neq 0$:

$$\tau(h) = \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

- **Développement** : $f(3+h) = (3+h)^2 = 9 + 6h + h^2$ et $f(3) = 9$.
- **Numérateur** : $9 + 6h + h^2 - 9 = 6h + h^2 = h(6+h)$.
- **Simplification** (licite car $h \neq 0$) :

$$\tau(h) = \frac{h(6+h)}{h} = 6 + h$$

- **Limite** : quand h tend vers 0, $6 + h$ tend vers 6.

$$f(3) = 6$$

Contrôle. Pour $f(x) = x^2$, on trouve $f(1) = 2$ et $f(3) = 6$: on devine la formule générale $f(a) = 2a$, qui sera démontrée dans le cours.

Réponse. $f(3) = 6$.

Correction de l'exercice 3 - Avec un cube

- **Développement** de $(2+h)^3$:

$$(2+h)^3 = 8 + 12h + 6h^2 + h^3$$

- **Numérateur du taux** : $8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 8 = 12h + 6h^2 + h^3$.
- **Factorisation par h** : $h(12 + 6h + h^2)$.
- **Taux simplifié** :

$$\tau(h) = \frac{h(12 + 6h + h^2)}{h} = 12 + 6h + h^2$$

- **Limite** : lorsque h tend vers 0, $6h$ et h^2 tendent vers 0.

$$g'(2) = 12$$

Le point délicat. Il faut connaître $(a+h)^3 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3$. Une fois le terme a^3 éliminé, **tous** les termes restants contiennent h : la factorisation est donc toujours possible.

Réponse. $g'(2) = 12$.

Correction de l'exercice 4 - Un trinôme en un point négatif

- **Valeur en -1** : $f(-1) = 2 \times 1 + 1 = 3$.
- **Valeur en $-1 + h$** :

$$f(-1+h) = 2(-1+h)^2 - (-1+h) = 2(1-2h+h^2) + 1 - h$$

- soit $2 - 4h + 2h^2 + 1 - h = 3 - 5h + 2h^2$.
- **Numérateur** : $3 - 5h + 2h^2 - 3 = -5h + 2h^2 = h(-5 + 2h)$.
- **Taux simplifié** : $\tau(h) = -5 + 2h$.
- **Limite** quand h tend vers 0 :

$$f(-1) = -5$$

Interprétation. Le nombre dérivé est **négatif** : la tangente au point d'abscisse -1 descend, et la fonction est décroissante au voisinage de ce point. Sa valeur, -5 , indique une pente forte.

- **Contrôle** : $f(-1,01) \approx 3,0503$ et $f(-0,99) \approx 2,9502$, ce qui donne un taux d'environ -5 sur ce petit intervalle ✓

Réponse. $f(-1) = -5$: la courbe descend en ce point.

Correction de l'exercice 5 - Le cas de la fonction affine

- **Numérateur** : $f(a+h) - f(a) = [3(a+h) + 5] - [3a + 5] = 3a + 3h + 5 - 3a - 5 = 3h$.
 — **Taux** :

$$\tau(h) = \frac{3h}{h} = 3$$

- Le taux ne dépend **ni de a , ni de h** : il vaut 3 quel que soit $h \neq 0$. Sa limite vaut donc 3.

$$f(a) = 3 \quad \text{pour tout réel } a$$

Interprétation. La courbe d'une fonction affine est une droite : sa tangente en chaque point est **la droite elle-même**, de coefficient directeur 3. Le nombre dérivé d'une fonction affine $ax + b$ vaut donc a partout.

Cas particulier. Pour une fonction constante, le taux est nul : la dérivée d'une constante est 0.

Réponse. $f(a) = 3$ pour tout a : la tangente est la droite elle-même.

Correction de l'exercice 6 - Lire un nombre dérivé sur un graphique

- a) Le point A a pour coordonnées $(1; 2)$, donc $f(1) = 2$.
 b) Le coefficient directeur se lit sur **deux points de la tangente** à coordonnées entières : $A(1; 2)$ et $B(3; 0)$.

$$f'(1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 2}{3 - 1} = -1$$

- Autrement dit : quand on avance de 1 vers la droite, la tangente descend de 1.
 — c) $f'(1) = -1 < 0$: la tangente descend, donc f est **décroissante** au voisinage de 1.

Méthode de lecture. On choisit deux points de la tangente à **coordonnées entières**, on compte le déplacement horizontal puis le déplacement vertical, et on divise. Jamais deux points de la courbe : ce serait une sécante, pas la tangente.

Réponse. a) $f(1) = 2$ — b) $f'(1) = -1$ — c) décroissante.

Correction de l'exercice 7 - Que dit le signe du nombre dérivé ?

Le nombre dérivé est le **coefficient directeur de la tangente** :

$f'(a) > 0$: tangente montante $f'(a) = 0$: tangente horizontale $f'(a) < 0$: tangente descendante

- En 0 : $g'(0) = 4 > 0$, la tangente monte fortement, g croît au voisinage de 0.
 — En 2 : $g'(2) = 0$, la tangente est **horizontale** : la courbe y présente un palier, souvent un extremum.
 — En 3 : $g'(3) = -1 < 0$, la tangente descend avec une pente douce (elle descend d'une unité quand on avance d'une unité).
 — En 5 : $g'(5) = -6$, la tangente descend très fortement.

La plus raide est celle en 5 : c'est la valeur absolue du nombre dérivé qui mesure la raideur, et $-6 = 6$ est la plus grande.

Attention. Une tangente horizontale **ne prouve pas** qu'il y a un extremum : elle en signale seulement la possibilité.

Réponse. Montante en 0, horizontale en 2, descendante en 3 et 5 ; la plus raide est en 5.

Correction de l'exercice 8 - Repérer les tangentes horizontales

a) La courbe présente un « sommet » en $x = 0$ et un « creux » en $x = 2$: en ces deux points, la tangente est **horizontale**, donc

$$f'(0) = 0 \quad f'(2) = 0$$

b) On lit le sens de variation sur chaque intervalle, et on en déduit le signe du nombre dérivé :

Intervalle	$] -1 ; 0[$	$] 0 ; 2[$	$] 2 ; 3[$
Variation de f	croissante	décroissante	croissante
Signe de $f'(x)$	+	-	+

Le lien à retenir. Le signe du nombre dérivé et le sens de variation disent la même chose : la dérivée est **l'outil** qui permettra, au chapitre suivant, de déterminer les variations **sans** tracer la courbe.

— **Contrôle visuel** : à gauche de 0 la courbe monte, entre 0 et 2 elle descend, puis elle remonte ✓

Réponse. a) $x = 0$ et $x = 2$ — b) + sur $] -1 ; 0[$, - sur $] 0 ; 2[$, + sur $] 2 ; 3[$.

Correction de l'exercice 9 - La vitesse instantanée

a) La vitesse moyenne est un taux d'accroissement :

$$v_{\text{moy}} = \frac{x(4) - x(3)}{4 - 3} = \frac{80 - 45}{1} = 35 \text{ m/s}$$

b) La vitesse instantanée est le nombre dérivé :

$$x'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(3+h) - x(3)}{h}$$

— $x(3+h) = 5(3+h)^2 = 5(9+6h+h^2) = 45+30h+5h^2$ et $x(3) = 45$.

— Numérateur : $30h+5h^2 = h(30+5h)$.

— Taux : $\tau(h) = 30+5h$, dont la limite en 0 vaut 30.

La vitesse instantanée à $t = 3$ s est de 30 m/s, soit 108 km/h.

Cohérence. La vitesse moyenne entre 3 s et 4 s (35 m/s) est supérieure à la vitesse instantanée à 3 s (30 m/s) : le mobile **accélère**.

Réponse. a) 35 m/s — b) $x'(3) = 30$ m/s.

Correction de l'exercice 10 - Le réservoir qui se vide

— **Valeurs** : $V(3) = 100 - 18 = 82$ et

$$V(3+h) = 100 - 2(3+h)^2 = 100 - 2(9+6h+h^2) = 82 - 12h - 2h^2$$

— **Numérateur** : $82 - 12h - 2h^2 - 82 = -12h - 2h^2 = h(-12 - 2h)$.

— **Taux simplifié** : $\tau(h) = -12 - 2h$.

— **Limite** quand h tend vers 0 :

$$V'(3) = -12$$

Interprétation. $V'(3) = -12$ litre par minute : à l'instant $t = 3$ min, le réservoir se vide **au rythme de 12 litres par minute**. Le signe négatif traduit une diminution.

Attention à l'unité. Un nombre dérivé s'exprime dans l'unité de f **divisée** par celle de la variable : ici des litres par minute, et non des litres.

- **Contrôle** : entre 3 et 3,1 min, le volume passe de 82 à 80,78 L, soit $-1,22$ L en 0,1 min, ce qui fait environ $-12,2$ L/min ✓

Réponse. $V'(3) = -12$ L/min : le réservoir se vide de 12 litres par minute.

Correction de l'exercice 11 - Classer des pentes

On raisonne uniquement sur l'**inclinaison de la tangente** en chaque point.

- En A (abscisse -1), la courbe est à un sommet : la tangente y est quasi **horizontale**, donc $f'(-1) \approx 0$.
- En B (abscisse $0,5$), la courbe **descend** : la tangente descend, donc $f'(0,5) < 0$.
- En C (abscisse 2), la courbe **monte fortement** : la tangente monte, donc $f'(2) > 0$, avec une valeur nettement positive.

$$f'(0,5) < f'(-1) < f'(2)$$

Ce que ce classement exige. Aucun calcul : seulement la règle « signe du nombre dérivé = sens de variation » et la comparaison des raideurs. C'est exactement ce que demande une question de lecture graphique au bac.

Réponse. $f'(0,5) < f'(-1) < f'(2)$.

Correction de l'exercice 12 - Une symétrie sur les pentes

Calcul du nombre dérivé en un point quelconque.

- $f(a+h) - f(a) = (a+h)^2 - a^2 = a^2 + 2ah + h^2 - a^2 = 2ah + h^2 = h(2a+h)$.
- Taux : $\tau(h) = 2a + h$, dont la limite en 0 vaut $2a$. Donc

$$f'(a) = 2a$$

- **En $-a$** : en remplaçant a par $-a$ dans la formule, $f'(-a) = 2 \times (-a) = -2a$.
- Or $-f'(a) = -2a$: les deux quantités sont bien égales.

$$f'(-a) = -f'(a)$$

Interprétation graphique. La parabole est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**. Deux points d'abscisses opposées ont donc des tangentes symétriques par rapport à cet axe, et deux droites symétriques par rapport à un axe vertical ont des coefficients directeurs **opposés**.

- **Contrôle** : $f(3) = 6$ et $f(-3) = -6$ ✓

Réponse. $f'(a) = 2a$, donc $f'(-a) = -2a = -f'(a)$.

Correction de l'exercice 13 - La pente de la route

- a) **Valeurs** : $h(200) = 0,01 \times 40\,000 = 400$ et

$$h(200+h) = 0,01(40\,000 + 400h + h^2) = 400 + 4h + 0,01h^2$$

- Numérateur : $4h + 0,01h^2 = h(4 + 0,01h)$.
- Taux : $\tau(h) = 4 + 0,01h$, de limite 4 quand h tend vers 0.

$$h'(200) = 4$$

- b) Une pente de 4 signifie que la route **monte de 4 m quand on avance de 1 m** : en pourcentage, cela fait 400 %.

Ce que cela révèle. Une telle pente est physiquement absurde pour une route : le modèle $h(x) = 0,01x^2$ n'est réaliste que pour de petites valeurs de x . En $x = 10$ m, on aurait $h'(10) = 0,2$, soit 20 % — déjà très raide, mais plausible.

À retenir. Le nombre dérivé, c'est la pente ; un modèle mathématique doit toujours être confronté au bon sens physique.

Réponse. a) $h'(200) = 4$ — b) 400 %, ce qui montre les limites du modèle.

Correction de l'exercice 14 - Le nombre dérivé d'une somme

— **Valeurs** : $f(1) = 1 + 3 = 4$ et

$$f(1+h) = (1+h)^2 + 3(1+h) = 1 + 2h + h^2 + 3 + 3h = 4 + 5h + h^2$$

— **Numérateur** : $4 + 5h + h^2 - 4 = 5h + h^2 = h(5 + h)$.

— **Taux** : $\tau(h) = 5 + h$, de limite 5.

$$f'(1) = 5$$

Vérification par les morceaux.

— Pour $u(x) = x^2$, on a vu que $u'(a) = 2a$, donc $u'(1) = 2$;

— pour $v(x) = 3x$, fonction affine, $v'(1) = 3$;

— et $2 + 3 = 5$, qui est bien $f'(1)$ ✓

Ce que cela annonce. La dérivée d'une somme est la somme des dérivées : c'est la première des formules d'opérations, et elle évite de repasser par la limite à chaque fois.

Réponse. $f'(1) = 5 = 2 + 3$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : la tangente et la courbe

a) $f(1) = 1 - 4 + 3 = 0$ et

$$f(1+h) = (1+h)^2 - 4(1+h) + 3 = 1 + 2h + h^2 - 4 - 4h + 3 = h^2 - 2h$$

— Numérateur : $h^2 - 2h - 0 = h(h - 2)$, donc $\tau(h) = h - 2$, de limite -2 .

$$f'(1) = -2$$

b) L'équation de la tangente au point d'abscisse a s'écrit :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

— Ici : $y = -2(x - 1) + 0 = -2x + 2$.

— c) On étudie le signe de la différence :

$$f(x) - (-2x + 2) = x^2 - 4x + 3 + 2x - 2 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

— Un carré est positif ou nul : la courbe est donc **au-dessus** de sa tangente sur $\mathbb{R}$, et elle la touche uniquement en $x = 1$.

Remarque. C'est vrai pour toute parabole tournée vers le haut : sa courbe reste au-dessus de chacune de ses tangentes.

Réponse. a) $f'(1) = -2$ — b) $y = -2x + 2$ — c) courbe au-dessus de T , contact en $x = 1$.