

Plaqueette 5 - Opérations sur les dérivées : produit, quotient et composée simple

Dérivation locale — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Opérations sur les dérivées. Pour u et v dérivables :

$$(u + v)' = u' + v' \quad (ku)' = ku' \quad (uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Puissances et racine d'une fonction.

$$(u^n)' = nu'u^{n-1} \quad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (u(ax + b))' = a u'(ax + b)$$

Dérivées de référence.

$f(x)$	k	x	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	0	1	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Méthode pour un quotient.

1. Identifier u et v , calculer u' et v' . 2. Appliquer $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ — attention à l'**ordre** des termes au numérateur. 3. **Développer et réduire** le numérateur seulement (garder v^2 factorisé). 4. Étudier le signe : $v^2 > 0$, donc le signe de f' est celui du **numérateur**.

Piège fréquent. $(uv)' \neq u'v$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' \neq \frac{u'}{v}$ — il n'y a aucune formule « terme à terme » pour le produit et le quotient.

Correction de l'exercice 1 - Dérivée d'un produit

Méthode 1 — formule du produit. Avec $u = 2x + 1$ et $v = x^2 - 3$:

— $u' = 2$ et $v' = 2x$.

$$f'(x) = 2(x^2 - 3) + (2x + 1)(2x) = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x - 6$$

Méthode 2 — développement préalable.

— $f(x) = 2x^3 - 6x + x^2 - 3 = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$.

— $f'(x) = 6x^2 + 2x - 6$ ✓ — **même résultat**, ce qui valide le calcul.

— **Contrôle numérique** : $f'(1) = 6 + 2 - 6 = 2$; et $\frac{f(1,001) - f(1)}{0,001} \approx 2,007$ ✓

— **Valeurs** : $f(1) = 3 \times (-2) = -6$.

— **Piège** : $u'v = 2 \times 2x = 4x \neq f'(x)$ — la « dérivée terme à terme » d'un produit est **fausse**.

— **Conseil** : quand le produit est facile à développer, le développement est souvent plus sûr ; la formule devient indispensable dès que les facteurs sont compliqués.

Réponse. $f'(x) = 6x^2 + 2x - 6$.

Correction de l'exercice 2 - Dérivée d'un quotient

— **Domaine** : $x \neq 2$.

— **Identification** : $u = x + 1$, $v = x - 2$, donc $u' = 1$ et $v' = 1$.

— **Formule** :

$$f(x) = \frac{1 \times (x - 2) - (x + 1) \times 1}{(x - 2)^2} = \frac{x - 2 - x - 1}{(x - 2)^2} = \frac{-3}{(x - 2)^2}$$

— **Signe** : $(x - 2)^2 > 0$, donc $f(x) < 0$ — la fonction est **strictement décroissante** sur chacun des deux intervalles $] -\infty ; 2[$ et $]2 ; +\infty[$.

— **Attention** : elle n'est **pas** décroissante sur la réunion des deux : $f(0) = -\frac{1}{2}$ alors que $f(3) = 4$.

— **Contrôle numérique** : $f(3) = -3$; et $\frac{f(3,001) - f(3)}{0,001} \approx -2,997 \checkmark$

— **Contrôle par réécriture** : $f(x) = \frac{(x - 2) + 3}{x - 2} = 1 + \frac{3}{x - 2}$, donc

$$f(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{(x - 2)^2} \right) = \frac{-3}{(x - 2)^2} \checkmark$$

— **Bonus** : cette réécriture montre que la courbe est une **hyperbole** d'asymptotes $x = 2$ et $y = 1$.

Réponse. $f(x) = \frac{-3}{(x - 2)^2} < 0$.

Correction de l'exercice 3 - Puissance d'une fonction

— **Formule** : $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ avec $u = 3x^2 - 1$, $u' = 6x$ et $n = 4$.

$$f(x) = 4 \times 6x \times (3x^2 - 1)^3 = 24x(3x^2 - 1)^3$$

— **Signe** : le produit de $24x$ et de $(3x^2 - 1)^3$ (du signe de $3x^2 - 1$).

— **Racines** : $x = 0$ et $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0,5774$.

— **Contrôle numérique** : $f(1) = 24 \times 2^3 = 192$; et $\frac{f(1,001) - f(1)}{0,001} \approx 192,96 \checkmark$

— **Valeur** : $f(1) = 2^4 = 16$.

— **Contrôle en** $x = 0$: $f(0) = 0$ — tangente horizontale, cohérent avec le **minimum local** $f(0) = 1$ (car $(-1)^4 = 1$).

— **Erreur classique** : écrire $f(x) = 4(3x^2 - 1)^3$ en oubliant le facteur $u' = 6x$. On le repère immédiatement en testant $x = 0$: la vraie dérivée doit s'y annuler.

Réponse. $f(x) = 24x(3x^2 - 1)^3$.

Correction de l'exercice 4 - Racine d'une fonction

— **Formule** : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u = x^2 + 1 > 0$ et $u' = 2x$.

$$f(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

— **Domaine** : $\mathbb{R}$ tout entier, car $x^2 + 1 \geq 1 > 0$.

— **Signe** : le dénominateur est positif, donc f est du **signe de** x .

- **Variations** : f décroît sur $] -\infty ; 0]$ et croît sur $[0 ; +\infty[$, avec un minimum $f(0) = 1$.
- **Contrôle numérique** : $f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7071$; et $\frac{f(1,001) - f(1)}{0,001} \approx 0,7073$ ✓
- **Parité** : f est **paire**, donc sa dérivée est **impaire** — cohérent avec $f(-x) = -f(x)$ ✓
- **Comportement à l'infini** : $f(x) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$, ce qui traduit l'asymptote oblique $y = x$ ✓
- **Contrôle de cette limite** : $f(100) = \frac{100}{\sqrt{10001}} \approx 0,99995$ ✓

Réponse. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, du signe de x .

Correction de l'exercice 5 - Produit de deux facteurs complexes

Méthode 1 — formule du produit. Avec $u = x^2$ et $v = \sqrt{x}$:

$$f(x) = 2x\sqrt{x} + x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}$$

- **Mise au même dénominateur** : $\frac{4x \times x + x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}}$ — attention, $2x\sqrt{x} = \frac{2x \times 2x}{2\sqrt{x}}$ n'est correct que si l'on écrit $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$.
- **Détail** : $2x\sqrt{x} = \frac{4x\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{4x^2}{2\sqrt{x}}$, donc la somme vaut $\frac{4x^2 + x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2}{2\sqrt{x}}$.

Méthode 2 — réécriture en puissance.

- $f(x) = x^2 \times x^{1/2} = x^{5/2}$, donc $f(x) = \frac{5}{2}x^{3/2} = \frac{5x\sqrt{x}}{2}$.
- **Cohérence des deux formes** : $\frac{5x^2}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2\sqrt{x}}{2x} = \frac{5x\sqrt{x}}{2}$ ✓
- **Contrôle numérique** : $f(4) = \frac{5 \times 4 \times 2}{2} = 20$; et $\frac{f(4,001) - f(4)}{0,001} \approx 20,004$ ✓
- **Valeur** : $f(4) = 16 \times 2 = 32$.
- **Leçon** : réécrire en puissance simplifie souvent radicalement le calcul.

Réponse. $f(x) = \frac{5x\sqrt{x}}{2}$.

Correction de l'exercice 6 - Quotient avec numérateur du second degré

- **Domaine** : $x \neq 1$.
- **Identification** : $u = x^2$, $v = x - 1$, donc $u' = 2x$ et $v' = 1$.
- **Formule** :

$$f(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$
- **Signe** : le dénominateur est positif, donc f a le signe de $x(x-2)$ — positif à l'extérieur de $[0 ; 2]$, négatif à l'intérieur.
- **Variations** : croissante sur $] -\infty ; 0]$, décroissante sur $[0 ; 1[$ puis sur $]1 ; 2]$, croissante sur $[2 ; +\infty[$.
- **Extremums** : $f(0) = 0$ (**maximum local**) et $f(2) = \frac{4}{1} = 4$ (**minimum local**).
- **Contrôle surprenant mais correct** : le maximum local vaut 0 et le minimum local vaut 4 — c'est possible car ils sont séparés par l'asymptote verticale $x = 1$ ✓
- **Contrôles numériques** : $f(-1) = \frac{1}{-2} = -0,5 < 0$ ✓ ; $f(3) = \frac{9}{2} = 4,5 > 4$ ✓
- **Contrôle de la dérivée** : $f(3) = \frac{3 \times 1}{4} = 0,75$; et $\frac{f(3,001) - f(3)}{0,001} \approx 0,7501$ ✓

Réponse. $f(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$: positive hors de $[0; 2]$, négative dedans.

Correction de l'exercice 7 - Dérivée de $u(ax+b)$

Première fonction. Avec $u = 2x + 3$ et $u' = 2$:

$$f(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+3}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

- **Domaine** : $x > -1,5$ (strictement, pour la dérivabilité).
- **Signe** : toujours positive, donc f est croissante ✓
- **Contrôle numérique** : $f(3) = \frac{1}{3}$; et $\frac{f(3,001) - f(3)}{0,001} \approx 0,33332$ ✓

Seconde fonction. On écrit $g(x) = (3x - 1)^{-2}$, ou l'on applique la formule de l'inverse avec $v = (3x - 1)^2$ et $v' = 2 \times 3 \times (3x - 1) = 6(3x - 1)$:

$$g'(x) = -\frac{6(3x-1)}{(3x-1)^4} = \frac{-6}{(3x-1)^3}$$

- **Domaine** : $x \neq \frac{1}{3}$.
- **Signe** : g' est **positive** pour $x < \frac{1}{3}$ (car $(3x - 1)^3 < 0$) et **négative** pour $x > \frac{1}{3}$.
- **Contrôle numérique** : $g'(1) = \frac{-6}{8} = -0,75$; et $\frac{g(1,001) - g(1)}{0,001} \approx -0,7483$ ✓
- **Cohérence** : g est positive et tend vers 0 en $\pm\infty$, avec une « explosion » en $\frac{1}{3}$ — d'où la croissance puis la décroissance ✓

Réponse. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ et $g'(x) = \frac{-6}{(3x-1)^3}$.

Correction de l'exercice 8 - Tangente à une fonction quotient

- **Valeur** : $f(1) = \frac{1}{2} = 0,5$.
- **Dérivée** : $u = 2x - 1$, $v = x + 1$, donc $u' = 2$ et $v' = 1$.

$$f(x) = \frac{2(x+1) - (2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

- **Pente** : $f'(1) = \frac{3}{4} = 0,75$.
- **Équation** :

$$y = \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$

- **Contrôle du point** : $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ✓
- **Contrôle de la dérivée** : $\frac{f(1,001) - f(1)}{0,001} \approx 0,74963$ ✓
- **Signe de f** : toujours **positif**, donc f est croissante sur chacun de ses intervalles de définition ($x \neq -1$).
- **Réécriture utile** : $f(x) = \frac{2(x+1) - 3}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$, d'où directement $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ ✓
et les asymptotes $x = -1$ et $y = 2$.

Réponse. $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 9 - Deux facteurs à dériver

- **Formule du produit** : $u = x - 1$, $v = \sqrt{x}$, donc $u' = 1$ et $v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{x-1}{2\sqrt{x}}$$

- **Mise au même dénominateur** :

$$f(x) = \frac{2x + x - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x - 1}{2\sqrt{x}}$$

- **Signe** : le dénominateur est positif, donc f a le signe de $3x - 1$: négative sur $]0; \frac{1}{3}[$, positive ensuite.

- **Minimum** : atteint en $x = \frac{1}{3}$.

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3} - 1\right)\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx -0,3849$$

- **Contrôles** : $f(0,25) = -0,75 \times 0,5 = -0,375$ et $f(0,4) \approx -0,6 \times 0,63246 \approx -0,3795$ — les deux sont **supérieurs** à $-0,3849$ ✓

- **Contrôle de la dérivée** : $f(1) = \frac{2}{2} = 1$; et $\frac{f(1,001) - f(1)}{0,001} \approx 1,0005$ ✓

- **Zéros de f** : $x = 1$ (et la valeur limite $x = 0$).

Réponse. $f(x) = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$; minimum $-\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx -0,385$ en $x = \frac{1}{3}$.

Correction de l'exercice 10 - Résoudre $f'(x) = 0$

- **Réécriture** : $f(x) = x + \frac{1}{x}$, donc

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

- **Équation** : $f(x) = 0$ pour $x = -1$ et $x = 1$.

- **Signe** : $x^2 > 0$, donc f a le signe de $(x-1)(x+1)$: positive à l'extérieur de $[-1; 1]$, négative à l'intérieur.

- **Valeurs** : $f(-1) = -2$ et $f(1) = 2$.

- **Tableau de variations** : croissante sur $] -\infty; -1]$, décroissante sur $[-1; 0[$, décroissante sur $]0; 1]$, croissante sur $[1; +\infty[$.

- **Extremums** : $f(-1) = -2$ est un **maximum local**, $f(1) = 2$ un **minimum local**.

- **Contrôles** : $f(2) = 2,5 > 2$ ✓ et $f(0,5) = 2,5 > 2$ ✓ — le minimum local est bien en 1.

- **Contrôle de la dérivée par la formule du quotient** : $\frac{2x \times x - (x^2 + 1)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$ ✓

- **Inégalité classique** : pour $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$, avec égalité en $x = 1$ ✓

Réponse. $x = \pm 1$; maximum local -2 en -1 , minimum local 2 en 1 .

Correction de l'exercice 11 - Fonction homographique

- **Formule du quotient** : $u = ax + b$, $v = cx + d$, donc $u' = a$ et $v' = c$.

$$f(x) = \frac{a(cx + d) - c(ax + b)}{(cx + d)^2} = \frac{acx + ad - acx - bc}{(cx + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

- **Numérateur constant** : $ad - bc$ ne dépend **pas** de x !

- **Conclusion** : le signe de f est celui de $ad - bc$, **constant** sur chaque intervalle de définition ✓
- $ad - bc > 0$: f est croissante sur chaque intervalle ; $ad - bc < 0$: décroissante ; $ad - bc = 0$: f est **constante** (les deux termes sont proportionnels).
- **Vérification sur un exemple** : $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ donne $ad - bc = 2 \times 1 - (-1) \times 1 = 3 > 0$
et $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$ ✓
- **Autre exemple** : $\frac{x+1}{x-2}$ donne $ad - bc = -2 - 1 = -3 < 0$, d'où $f(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$ ✓
- **Cas dégénéré** : $\frac{2x+4}{x+2} = 2$ pour $x \neq -2$, avec $ad - bc = 4 - 4 = 0$ ✓
- **À retenir** : une fonction homographique est **toujours monotone** sur chacun des deux intervalles — jamais d'extremum.

Réponse. $f(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, du signe constant de $ad - bc$.

Correction de l'exercice 12 - Optimisation d'un volume

- **Dérivée** — produit de $u = x$ et $v = (10 - 2x)^2$, avec $v' = 2 \times (-2)(10 - 2x) = -4(10 - 2x)$:
$$V'(x) = (10 - 2x)^2 - 4x(10 - 2x) = (10 - 2x)[(10 - 2x) - 4x] = (10 - 2x)(10 - 6x)$$
- **Racines** : $x = 5$ (exclue) et $x = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \approx 1,667$.
- **Signe** : sur $]0; 5[$, le facteur $10 - 2x$ est positif ; $10 - 6x$ est positif avant $\frac{5}{3}$, négatif après.
- **Conclusion** : V croît jusqu'à $\frac{5}{3}$ puis décroît — **maximum** en $x = \frac{5}{3}$.
- **Valeur** :

$$V\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3} \times \left(10 - \frac{10}{3}\right)^2 = \frac{5}{3} \times \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{5}{3} \times \frac{400}{9} = \frac{2000}{27} \approx 74,07$$

- **Contrôles** : $V(1,5) = 1,5 \times 49 = 73,5$ et $V(2) = 2 \times 36 = 72$ — tous deux inférieurs à 74,07 ✓
- **Contrôle de la dérivée** : $V'(1) = 8 \times 4 = 32 > 0$ ✓ et $V'(2) = 6 \times (-2) = -12 < 0$ ✓
- **Remarque** : la factorisation de V' **avant** de développer rend la résolution immédiate — développer donnerait $12x^2 - 80x + 100$, dont il faudrait chercher les racines.

Réponse. Maximum $\frac{2000}{27} \approx 74,07$ pour $x = \frac{5}{3}$.

Correction de l'exercice 13 - Dérivée d'un produit de trois facteurs

Méthode par regroupement. On pose $u = x$ et $v = (x - 1)(x - 2) = x^2 - 3x + 2$, d'où $v' = 2x - 3$.

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2) + x(2x - 3) = x^2 - 3x + 2 + 2x^2 - 3x = 3x^2 - 6x + 2$$

Vérification par développement.

- $f(x) = x(x^2 - 3x + 2) = x^3 - 3x^2 + 2x$.
- $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ ✓
- **Racines de f** : $\Delta = 36 - 24 = 12$, donc $x = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, soit $x \approx 0,4226$ et $x \approx 1,5774$.

- **Valeurs** : $f(0,4226) \approx 0,3849$ (maximum local) et $f(1,5774) \approx -0,3849$ (minimum local).
- **Symétrie** : les deux extremums sont **opposés**, car la courbe est symétrique par rapport au point $(1; 0)$ ✓
- **Contrôle de cette symétrie** : $f(1+h) = (1+h)h(h-1) = h(h^2-1)$ et $f(1-h) = (1-h)(-h)(-h-1) = h(1-h^2) \times \dots$ — plus simplement, $f(1+h) + f(1-h) = 0$ se vérifie pour $h = 1$: $f(2) + f(0) = 0 + 0 = 0$ ✓ et pour $h = 0,5$: $f(1,5) + f(0,5) = -0,375 + 0,375 = 0$ ✓

Réponse. $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$.

Correction de l'exercice 14 - Signe d'une dérivée avec racine

- **Formule du quotient** : $u = \sqrt{x}$, $v = x + 1$, donc $u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $v' = 1$.

$$f(x) = \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x+1)^2}$$

- **Simplification du numérateur** : $\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{x+1-2x}{2\sqrt{x}} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$.

$$f(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$$

- **Signe** : le dénominateur est strictement positif, donc f a le signe de $1-x$.
- **Variations** : croissante sur $]0; 1]$, décroissante sur $[1; +\infty[$.
- **Maximum** : $f(1) = \frac{1}{2} = 0,5$.
- **Contrôles** : $f(0,25) = \frac{0,5}{1,25} = 0,4$ et $f(4) = \frac{2}{5} = 0,4$ — tous deux inférieurs à $0,5$ ✓
- **Coïncidence instructive** : $f(0,25) = f(4)$, car $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1/\sqrt{x}}{\frac{1}{x}+1} = \frac{\sqrt{x}}{1+x} = f(x)$ — la fonction est invariante par $x \mapsto \frac{1}{x}$ ✓
- **Limites** : $f(x) \rightarrow 0$ en 0^+ et en $+\infty$ — la courbe forme une « bosse » de sommet $(1; 0,5)$.

Réponse. $f(x) = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x+1)^2}$; maximum $0,5$ en $x = 1$.

Correction de l'exercice 15 - Recherche d'un coefficient

- **Réécriture** : $f(x) = x + \frac{a}{x}$, donc

$$f(x) = 1 - \frac{a}{x^2} = \frac{x^2 - a}{x^2}$$

- **Condition** : $f(3) = 0$ donne $9 - a = 0$, donc

$$a = 9$$

- **Vérification que c'est bien un extremum** : $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2} = \frac{(x-3)(x+3)}{x^2}$ change bien de signe en 3 (négative avant, positive après) ✓
- **Nature** : c'est un **minimum local**, de valeur $f(3) = 3 + 3 = 6$.
- **Contrôles** : $f(2) = 2 + 4,5 = 6,5 > 6$ ✓ et $f(4) = 4 + 2,25 = 6,25 > 6$ ✓
- **Second extremum** : en $x = -3$, avec $f(-3) = -6$ — un **maximum local**.

- **Propriété générale** : pour $f(x) = x + \frac{a}{x}$ avec $a > 0$, les extremums sont en $x = \pm\sqrt{a}$, avec les valeurs $\pm 2\sqrt{a}$. Ici $2\sqrt{9} = 6$ ✓
- **Cas** $a < 0$: $f(x) = \frac{x^2 - a}{x^2} > 0$ partout — aucun extremum.

Réponse. $a = 9$; minimum local $f(3) = 6$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : étude d'une fonction quotient

- a) **Dérivée** — avec $u = x^2 - 3x$ et $v = x - 1$, donc $u' = 2x - 3$ et $v' = 1$:

$$f(x) = \frac{(2x - 3)(x - 1) - (x^2 - 3x)}{(x - 1)^2}$$

- **Développement du numérateur** : $2x^2 - 2x - 3x + 3 - x^2 + 3x = x^2 - 2x + 3$.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x - 1)^2}$$

- b) **Signe.** Le discriminant du numérateur vaut $4 - 12 = -8 < 0$, donc $x^2 - 2x + 3$ est **toujours strictement positif** (coefficient dominant positif).

- Le dénominateur est positif, donc $f(x) > 0$ sur tout $]1; +\infty[$.
- **Conclusion** : f est **strictement croissante** sur $]1; +\infty[$, sans aucun extremum.
- **Contrôle par forme canonique** : $x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2 \geq 2 > 0$ ✓
- **Simplification remarquable** : $f(x) = \frac{(x - 1)^2 + 2}{(x - 1)^2} = 1 + \frac{2}{(x - 1)^2}$, manifestement supérieure à 1 ✓
- **Limites** : $f(x) \rightarrow -\infty$ quand $x \rightarrow 1^+$ (car le numérateur tend vers $-2 < 0$) et $f(x) \rightarrow +\infty$ en $+\infty$.

- c) **Tangente en 2.** $f(2) = \frac{4 - 6}{1} = -2$ et $f(2) = \frac{4 - 4 + 3}{1} = 3$.

$$y = 3(x - 2) - 2 = 3x - 8$$

- **Contrôle du point** : $6 - 8 = -2$ ✓
- **Contrôle numérique de la pente** : $\frac{f(2,001) - f(2)}{0,001} \approx 2,998$ ✓
- **Zéro de f** : $x = 3$ (car $x^2 - 3x = x(x - 3)$), point où la courbe traverse l'axe des abscisses ✓

Réponse. a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{(x - 1)^2}$ · b) strictement croissante · c) $y = 3x - 8$.