

Plaquette 4 - Taux d'accroissement, nombre dérivé et lecture graphique

Dérivation locale — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Taux d'accroissement de f entre a et $a + h$:

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

C'est le **coefficient directeur de la sécante** joignant les points d'abscisses a et $a + h$.

Nombre dérivé. f est dérivable en a si $\tau(h)$ admet une limite finie quand h tend vers 0 ; cette limite est notée

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Interprétation géométrique. $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** à la courbe au point d'abscisse a .

Dérivées des fonctions de référence.

$$(x^n)' = nx^{n-1} \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Lecture graphique d'un nombre dérivé. On repère deux points **précis** de la tangente et l'on calcule $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

- Tangente **horizontale** $\Rightarrow f'(a) = 0$.
- Tangente « montante » $\Rightarrow f'(a) > 0$; « descendante » $\Rightarrow f'(a) < 0$.
- Tangente **verticale** $\Rightarrow f$ n'est **pas** dérivable en a .

Approximation affine. Pour h petit :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$$

Correction de l'exercice 1 - Taux d'accroissement

— **Calcul** : $f(2+h) = (2+h)^2 = 4 + 4h + h^2$ et $f(2) = 4$.

— **Taux** :

$$\tau(h) = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h$$

— **Simplification légitime** car $h \neq 0$ dans un taux d'accroissement.

— **Limite** : quand $h \rightarrow 0$, $\tau(h) \rightarrow 4$, donc

$$f'(2) = 4$$

— **Contrôle par la formule** : $f'(x) = 2x$, donc $f'(2) = 4$ ✓

— **Contrôles numériques** : $\tau(0,1) = 4,1$, $\tau(0,01) = 4,01$, $\tau(-0,01) = 3,99$ — la convergence vers 4 est nette ✓

— **Lecture** : la tangente en $(2; 4)$ a pour coefficient directeur 4 ; son équation est $y = 4x - 4$.

- **Vérification de la tangente** : $x^2 - (4x - 4) = (x - 2)^2 \geq 0$ — la courbe reste au-dessus de sa tangente ✓

Réponse. $\tau(h) = 4 + h$ et $f(2) = 4$.

Correction de l'exercice 2 - Taux d'accroissement d'un inverse

- **Taux** :

$$\tau(h) = \frac{\frac{1}{3+h} - \frac{1}{3}}{h}$$

- **Mise au même dénominateur** au numérateur : $\frac{3 - (3+h)}{3(3+h)} = \frac{-h}{3(3+h)}$.

- **Division par h** :

$$\tau(h) = \frac{-h}{3h(3+h)} = \frac{-1}{3(3+h)}$$

- **Limite** : quand $h \rightarrow 0$, $\tau(h) \rightarrow \frac{-1}{9}$, donc

$$f(3) = -\frac{1}{9}$$

- **Contrôle par la formule** : $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc $f(3) = -\frac{1}{9}$ ✓

- **Contrôle numérique** : $\tau(0,01) = \frac{-1}{3 \times 3,01} \approx -0,11074$, proche de $-0,11111$ ✓

- **Signe** : négatif, ce qui est cohérent avec une fonction **décroissante** sur $]0; +\infty[$ ✓

- **Tangente** : $y = -\frac{1}{9}(x - 3) + \frac{1}{3} = -\frac{x}{9} + \frac{2}{3}$.

Réponse. $f(3) = -\frac{1}{9}$.

Correction de l'exercice 3 - Taux d'accroissement d'une racine

- **Taux** : $\tau(h) = \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$.

- **Multiplication par le conjugué** :

$$\tau(h) = \frac{(\sqrt{4+h} - 2)(\sqrt{4+h} + 2)}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{4+h} + 2}$$

- **Limite** : quand $h \rightarrow 0$, $\sqrt{4+h} \rightarrow 2$, donc

$$f(4) = \frac{1}{4} = 0,25$$

- **Contrôle par la formule** : $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $f(4) = \frac{1}{4}$ ✓

- **Contrôle numérique** : $\frac{\sqrt{4,01} - 2}{0,01} = \frac{2,002498 - 2}{0,01} \approx 0,24984$ ✓

- **Intérêt du conjugué** : il transforme une différence de racines en différence de carrés, ce qui **élimine** le h du numérateur — technique indispensable pour ce type de limite.

- **Approximation affine** : $\sqrt{4,1} \approx 2 + 0,1 \times 0,25 = 2,025$, contre 2,024846 en réalité — erreur inférieure à 2×10^{-4} ✓

Réponse. $f(4) = \frac{1}{4}$.

Correction de l'exercice 4 - Lecture graphique

- **Valeur de la fonction** : A appartient à la courbe, donc $f(1) = 3$.
- **Nombre dérivé** = coefficient directeur de la tangente :

$$f'(1) = \frac{9-3}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$$
- **Équation de la tangente** : $y = 2(x - 1) + 3 = 2x + 1$.
- **Contrôles** : la droite passe par $A(1; 3)$ car $2 + 1 = 3$ ✓ et par $B(4; 9)$ car $8 + 1 = 9$ ✓
- **Interprétation** : au voisinage de $x = 1$, la courbe « ressemble » à la droite $y = 2x + 1$.
- **Approximation affine** : $f(1,1) \approx 2 \times 1,1 + 1 = 3,2$.
- **Attention** : B est un point de la **tangente**, pas nécessairement de la courbe — rien ne dit que $f(4) = 9$.

Réponse. $f(1) = 3$ et $f'(1) = 2$.

Correction de l'exercice 5 - Équation de tangente

- **Valeur** : $f(-1) = -1 + 2 = 1$.
- **Dérivée** : $f'(x) = 3x^2 - 2$, donc $f'(-1) = 3 - 2 = 1$.
- **Équation** : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ avec $a = -1$:

$$y = 1 \times (x + 1) + 1 = x + 2$$
- **Contrôle du point de contact** : la droite passe par $(-1; 1)$ car $-1 + 2 = 1$ ✓
- **Position relative** : $f(x) - (x + 2) = x^3 - 3x - 2$. Or -1 est racine (double, puisque la droite est tangente) : $x^3 - 3x - 2 = (x + 1)^2(x - 2)$.
- **Vérification par développement** :
 $(x^2 + 2x + 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 4x + x - 2 = x^3 - 3x - 2$ ✓
- **Conclusion sur la position** : la courbe est **en dessous** de la tangente sur $] - \infty; 2[$ (sauf contact en -1) et **au-dessus** sur $]2; +\infty[$ — la tangente **traverse** la courbe en $x = 2$.
- **Second point d'intersection** : $(2; 4)$, qui est bien sur la droite ($2 + 2 = 4$) et sur la courbe ($8 - 4 = 4$) ✓

Réponse. $y = x + 2$.

Correction de l'exercice 6 - Tangente horizontale

- **Condition** : tangente horizontale $\Leftrightarrow f'(x) = 0$.
- **Dérivée** : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$.
- **Racines** : $x = -1$ et $x = 1$.
- **Ordonnées** : $f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$ et $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$.
- **Points** :

$$A(-1; 3) \quad \text{et} \quad B(1; -1)$$
- **Tangentes** : $y = 3$ et $y = -1$.
- **Nature** : f' est positive à l'extérieur de $[-1; 1]$ et négative à l'intérieur, donc A est un **maximum local** et B un **minimum local** ✓
- **Contrôles** : $f(-2) = -8 + 6 + 1 = -1 < 3$ et $f(0) = 1 < 3$ — cohérent avec un maximum local en -1 ✓
- **Remarque** : ce sont des extremums **locaux** seulement : $f(3) = 27 - 9 + 1 = 19 > 3$, donc A n'est pas un maximum global.

Réponse. $A(-1; 3)$ et $B(1; -1)$.

Correction de l'exercice 7 - Tangente de pente donnée

- **Dérivée** : $f(x) = 2x - 4$.
- **Équation** : $2x - 4 = 2$, donc $x = 3$.
- **Ordonnée** : $f(3) = 9 - 12 = -3$.
- **Tangente** : $y = 2(x - 3) - 3 = 2x - 9$.
- **Contrôles** : la droite passe par $(3; -3)$ car $6 - 9 = -3$ ✓
- **Unicité** : f est une fonction **affine** strictement croissante, donc chaque pente est atteinte en **un seul** point.
- **Position relative** : $f(x) - (2x - 9) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 \geq 0$ — la parabole est toujours au-dessus de cette tangente ✓
- **Comparaison** : la tangente horizontale ($f' = 0$) est en $x = 2$, au sommet $(2; -4)$ — le minimum de f ✓

Réponse. $x = 3$, avec la tangente $y = 2x - 9$.

Correction de l'exercice 8 - Deux tangentes parallèles

- **Dérivée** : $f(x) = 3x^2$.
- **Pentes** : $f'(-2) = 12$ et $f'(2) = 12$ — **identiques**, donc les tangentes sont **parallèles** ✓
- **Points de contact** : $f(-2) = -8$ et $f(2) = 8$.
- **Équations** :

$$y = 12(x + 2) - 8 = 12x + 16 \quad \text{et} \quad y = 12(x - 2) + 8 = 12x - 16$$
- **Non confondues** : les ordonnées à l'origine diffèrent ($16 \neq -16$) ✓
- **Contrôles** : la première passe par $(-2; -8)$ car $-24 + 16 = -8$ ✓ ; la seconde par $(2; 8)$ car $24 - 16 = 8$ ✓
- **Raison profonde** : f est une fonction **paire** ($3x^2$), donc $f(-a) = f(a)$ pour tout a — toutes les paires de points symétriques ont des tangentes parallèles.
- **Symétrie** : f est **impaire**, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'origine, et les deux tangentes se déduisent l'une de l'autre par cette symétrie ✓

Réponse. Même pente 12, mais ordonnées à l'origine 16 et -16.

Correction de l'exercice 9 - Approximation affine

- **Fonction** : $f(x) = \sqrt{x}$ avec $a = 9$ et $h = 0,2$.
- **Éléments** : $f(9) = 3$ et $f'(9) = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$.
- **Approximation** :

$$\sqrt{9,2} \approx 3 + 0,2 \times \frac{1}{6} = 3 + \frac{1}{30} \approx 3,03333$$
- **Valeur exacte** : $\sqrt{9,2} \approx 3,03315$.
- **Erreur** : $1,8 \times 10^{-4}$, soit une précision relative de 6×10^{-5} ✓
- **Sens de l'erreur** : l'approximation **surestime**, car la fonction racine est **concave** — sa courbe est en dessous de ses tangentes ✓
- **Contrôle sur un autre point** : $\sqrt{9,5} \approx 3 + 0,5 / 6 \approx 3,08333$ contre 3,08221 en réalité — l'erreur croît avec h (elle est de l'ordre de h^2).
- **Usage** : cette méthode permettait le calcul mental de racines avant les calculatrices, et reste le fondement de la méthode de Newton.

Réponse. $\sqrt{9,2} \approx 3,0333$ (valeur exacte 3,03315).

Correction de l'exercice 10 - Non-dérivabilité

- **Taux d'accroissement en 0** : $\tau(h) = \frac{|h| - 0}{h} = \frac{|h|}{h}$.
- **Cas $h > 0$** : $\tau(h) = \frac{h}{h} = 1$.
- **Cas $h < 0$** : $\tau(h) = \frac{-h}{h} = -1$.
- **Conclusion** : les limites à droite (1) et à gauche (-1) sont **différentes**, donc $\tau(h)$ n'a **pas de limite** en 0 : f n'est pas dérivable en 0 ✓
- **Lecture graphique** : la courbe présente un **point anguleux** en 0 — deux demi-tangentes de pentes 1 et -1, mais aucune tangente unique.
- **Contrôle numérique** : $\tau(0,001) = 1$ et $\tau(-0,001) = -1$ ✓
- **Continuité préservée** : f est bien **continue** en 0 (car $|h| \rightarrow 0$) — être continue ne suffit donc pas pour être dérivable.
- **Autre exemple** : $g(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0, mais pour une raison différente — le taux $\frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$: la tangente est **verticale**.

Réponse. Les taux tendent vers 1 à droite et -1 à gauche : pas de nombre dérivé.

Correction de l'exercice 11 - Coût marginal

- **Coût marginal** = dérivée du coût : $C'(q) = q + 10$.
- **Valeur** : $C'(20) = 30$ €.
- **Interprétation** : produire le **21^e** article coûte environ 30 €.
- **Contrôle exact** :
 $C(21) - C(20) = (0,5 \times 441 + 210 + 200) - (0,5 \times 400 + 200 + 200) = 630,5 - 600 = 30,5$ €.
- **Écart** : 0,5 € seulement — l'approximation par la dérivée est excellente ✓
- **Explication de l'écart** : $C(q+1) - C(q) = C'(q) + 0,5$ exactement ici, car le terme quadratique contribue 0,5 de plus.
- **Coût moyen** : $\frac{C(20)}{20} = \frac{600}{20} = 30$ € par article — égal au coût marginal, ce qui signale précisément le **minimum du coût moyen** ✓
- **Vérification** : $\frac{C(19)}{19} = \frac{570,5}{19} \approx 30,03$ et $\frac{C(21)}{21} = \frac{630,5}{21} \approx 30,02$ — le coût moyen est bien minimal autour de $q = 20$ ✓

Réponse. $C'(20) = 30$ € : le 21^e article coûte environ 30 € (valeur exacte 30,50 €).

Correction de l'exercice 12 - Vitesse instantanée

- **Vitesse moyenne** :

$$v_m = \frac{d(3) - d(1)}{3 - 1} = \frac{(18 + 9) - (2 + 3)}{2} = \frac{27 - 5}{2} = 11 \text{ m/s}$$
- **Vitesse instantanée** : $d'(t) = 4t + 3$, donc $d'(1) = 7$ m/s.
- **Comparaison** : $7 < 11$ — le mobile **accélère**, sa vitesse instantanée initiale est inférieure à la moyenne sur l'intervalle ✓
- **Contrôle** : $d'(3) = 15$ m/s, et la moyenne des vitesses aux extrémités vaut $\frac{7 + 15}{2} = 11$ m/s = v_m ✓
- **Pourquoi cette coïncidence** : la vitesse est une fonction **affine** du temps (mouvement uniformément accéléré), donc sa moyenne sur un intervalle est la

moyenne de ses valeurs aux bornes.

- **Accélération** : $d''(t) = 4 \text{ m/s}^2$ — constante.
- **Instant où** $v = 11 \text{ m/s}$: $4t + 3 = 11$ donne $t = 2$, le **milieu** de $[1; 3]$ ✓

Réponse. $v_m = 11 \text{ m/s}$ et $d'(1) = 7 \text{ m/s}$.

Correction de l'exercice 13 - Dérivée d'un polynôme

- **Dérivation terme à terme** :

$$f(x) = 12x^2 - x + 7$$

- **Détails** : $(4x^3)' = 12x^2$; $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$; $(7x)' = 7$; $(-5)' = 0$.
- **Valeur** : $f(2) = 48 - 2 + 7 = 53$.
- **Contrôle par le taux d'accroissement** : $f(2) = 32 - 2 + 14 - 5 = 39$ et $f(2,001) \approx 39,05302$.
- $\tau \approx \frac{0,05302}{0,001} \approx 53,02$ ✓ — cohérent avec 53.
- **Signe de f** : le discriminant de $12x^2 - x + 7$ vaut $1 - 336 = -335 < 0$, donc f est **toujours positive** : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ✓
- **Conséquence** : la courbe n'a **aucune** tangente horizontale, et l'équation $f(x) = k$ a exactement une solution pour tout k .
- **Tangente en 2** : $y = 53(x - 2) + 39 = 53x - 67$.

Réponse. $f(x) = 12x^2 - x + 7$ et $f(2) = 53$.

Correction de l'exercice 14 - Tangente passant par un point donné

- **Tangente au point d'abscisse a** : de pente $2a$, elle a pour équation

$$y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$$

- **Passage par $P(0; -1)$** : $-1 = 0 - a^2$, donc $a^2 = 1$ et $a = \pm 1$.
- **Deux tangentes** :

$$y = 2x - 1 \quad \text{et} \quad y = -2x - 1$$

- **Points de contact** : $(1; 1)$ et $(-1; 1)$.
- **Contrôles** : $y = 2x - 1$ passe par $(1; 1)$ ✓ et par $(0; -1)$ ✓ ; de même pour l'autre ✓
- **Vérification du caractère tangent** : $x^2 - (2x - 1) = (x - 1)^2 \geq 0$ — contact unique en $x = 1$ ✓
- **Symétrie** : P est sur l'axe de symétrie de la parabole, donc les deux tangentes sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées ✓
- **Remarque** : le point P est **extérieur** à la parabole (en dessous), ce qui explique qu'il existe exactement **deux** tangentes. Un point intérieur n'en donnerait aucune.

Réponse. $y = 2x - 1$ et $y = -2x - 1$.

Correction de l'exercice 15 - Lecture d'un tableau de valeurs

- **Taux à droite** :

$$\frac{5,32 - 5}{0,1} = \frac{0,32}{0,1} = 3,2$$

- **Taux à gauche** :

$$\frac{5 - 4,70}{0,1} = \frac{0,30}{0,1} = 3,0$$

— **Taux centré** (le plus précis) :

$$\frac{5,32 - 4,70}{0,2} = \frac{0,62}{0,2} = 3,1$$

— **Estimation retenue** : $f'(2) \approx 3,1$.

— **Pourquoi le taux centré est meilleur** : il est la **moyenne** des deux autres, et les erreurs d'ordre h s'y compensent — son erreur est en h^2 au lieu de h .

— **Contrôle de cohérence** : $\frac{3,2 + 3,0}{2} = 3,1 \checkmark$

— **Information supplémentaire** : le taux à droite dépasse celui à gauche, ce qui suggère une fonction **convexe** au voisinage de 2.

— **Exemple compatible** : $f(x) = x^2 - x + 3$ donne $f(2) = 5$, $f(2,1) = 5,31$ et $f(1,9) = 4,71$, avec $f'(2) = 3$ — très proche des données.

Réponse. 3,2 à droite, 3,0 à gauche, 3,1 en centré (meilleure estimation).

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : étude locale complète

a) **Dérivée** : $f(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

— **Racines** : $x = 0$ et $x = 2$.

— **Ordonnées** : $f(0) = 2$ et $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$.

— **Points** : $A(0; 2)$ et $B(2; -2)$, avec les tangentes $y = 2$ et $y = -2$.

— **Nature** : f' est positive à l'extérieur de $[0; 2]$, négative à l'intérieur — A est un **maximum local**, B un **minimum local** ✓

b) **Tangente en 1** : $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ et $f'(1) = 3 - 6 = -3$.

$$y = -3(x - 1) + 0 = -3x + 3$$

c) **Position relative.** On étudie la différence

$$f(x) - (-3x + 3) = x^3 - 3x^2 + 2 + 3x - 3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3$$

— **Contrôle du développement** : $(x - 1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \checkmark$

— **Signe** : $(x - 1)^3$ est du **signe de** $x - 1$.

— **Conclusion** :

— sur $] -\infty; 1[$, la différence est négative : la courbe est **en dessous** de la tangente ;

— sur $]1; +\infty[$, elle est positive : la courbe est **au-dessus** ;

— en $x = 1$, contact unique.

— **Interprétation** : la tangente **traverse** la courbe — le point $(1; 0)$ est un **point d'inflexion** ✓

— **Contrôles numériques** : $f(0) = 2$ contre $-3 \times 0 + 3 = 3$ (courbe en dessous ✓) ; $f(2) = -2$ contre -3 (courbe au-dessus ✓).

— **Cohérence** : 1 est le milieu de $[0; 2]$, ce qui est attendu — le point d'inflexion d'une cubique est toujours au milieu de ses deux extremums.

Réponse. a) $A(0; 2)$ et $B(2; -2)$ · b) $y = -3x + 3$ · c) $f(x) - y = (x - 1)^3$: la tangente traverse la courbe (inflexion).