

Plaquette 1 - Nombre dérivé et tangente

Dérivation locale — Première spé maths

Exercices

Méthode

Le nombre dérivé se construit en deux temps : on calcule le **taux d'accroissement** entre a et $a + h$, on le **simplifie**, puis on regarde vers quoi il tend quand h devient nul. Ce nombre est la **pente de la tangente** — et, dans un problème, une vitesse, un débit ou un coût marginal.

Exercice 1 - Des sécantes de plus en plus proches

Soit $f(x) = x^2$. Calculer le taux d'accroissement de f entre 1 et chacune des valeurs suivantes.

- a) entre 1 et 3
- b) entre 1 et 1,5
- c) entre 1 et 1,1
- d) Que peut-on conjecturer pour $f'(1)$?

Exercice 2 - Le nombre dérivé par la limite

Soit $f(x) = x^2$. Calculer $f'(3)$ en revenant à la définition.

Exercice 3 - Avec un cube

Soit $g(x) = x^3$. Calculer $g'(2)$ en utilisant la définition du nombre dérivé.

Exercice 4 - Un trinôme en un point négatif

Soit $f(x) = 2x^2 - x$. Calculer $f'(-1)$ par la définition, puis interpréter le signe obtenu.

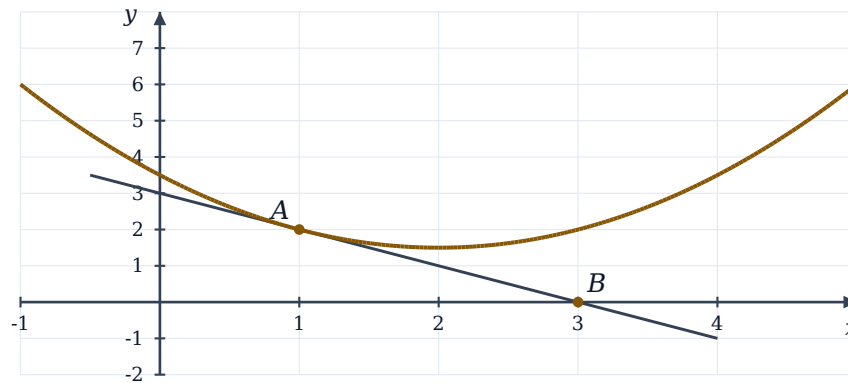
Exercice 5 - Le cas de la fonction affine

Soit $f(x) = 3x + 5$ et a un réel quelconque. Calculer $f'(a)$ et interpréter le résultat.

Exercice 6 - Lire un nombre dérivé sur un graphique

Sur le graphique ci-dessous, la droite tracée est la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse 1.

- Lire $f(1)$.
- Déterminer $f'(1)$ en lisant le coefficient directeur de la tangente, qui passe aussi par $B(3; 0)$.
- La fonction est-elle croissante ou décroissante au voisinage de 1 ?



Courbe de f et sa tangente en A

Exercice 7 - Que dit le signe du nombre dérivé ?

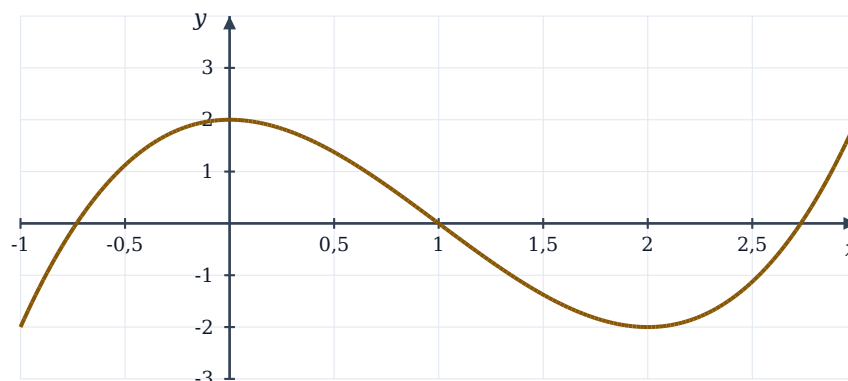
Pour une fonction g , on sait que $g'(0) = 4$, $g'(2) = 0$, $g'(3) = -1$ et $g'(5) = -6$.

Décrire l'allure de la courbe de g en chacun de ces quatre points, en précisant laquelle des tangentes est la plus raide.

Exercice 8 - Repérer les tangentes horizontales

La courbe ci-dessous représente une fonction f définie sur $[-1; 3]$.

- Pour quelles valeurs de x la tangente à la courbe semble-t-elle horizontale ?
- Donner le signe de $f'(x)$ sur chacun des intervalles délimités par ces valeurs.



Courbe de f sur $[-1; 3]$

Exercice 9 - La vitesse instantanée

Un mobile en chute libre parcourt $x(t) = 5t^2$ mètres en t secondes.

- Calculer sa vitesse moyenne entre $t = 3$ s et $t = 4$ s.
- Calculer sa vitesse instantanée à $t = 3$ s, c'est-à-dire $x'(3)$.

Exercice 10 - Le réservoir qui se vide

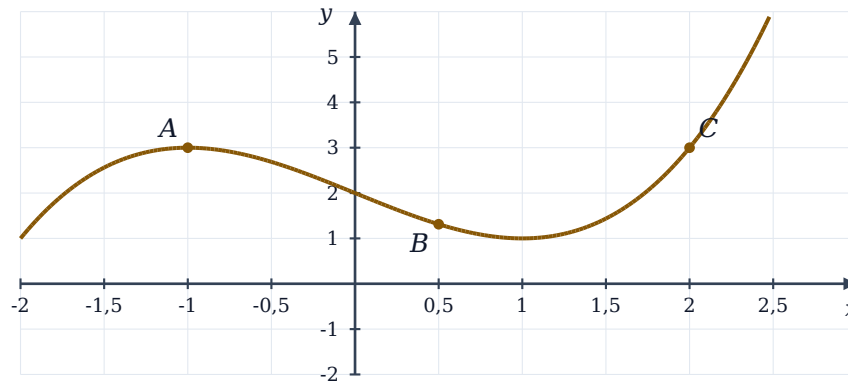
Un réservoir contient $V(t) = 100 - 2t^2$ litres d'eau au bout de t minutes, pour $0 \leq t \leq 7$.

Calculer $V'(3)$ et interpréter le résultat, unité comprise.

Exercice 11 - Classer des pentes

Sur la courbe ci-dessous sont placés trois points A , B et C d'abscisses respectives -1 , $0,5$ et 2 .

Ranger $f(-1)$, $f'(0,5)$ et $f'(2)$ dans l'ordre croissant, en justifiant sans calcul.



Trois points de la courbe de f

Exercice 12 - Une symétrie sur les pentes

Soit $f(x) = x^2$ et a un réel. Démontrer que $f'(-a) = -f'(a)$, puis interpréter graphiquement.

Exercice 13 - La pente de la route

Le profil d'une route de montagne est donné par $h(x) = 0,01x^2$, où x et $h(x)$ sont exprimés en mètres.

- Calculer $h'(200)$.
- Un panneau annonce la pente en pourcentage : une pente de $0,08$ s'affiche « 8 % ». Quel pourcentage affiche le panneau au point d'abscisse 200 m ?

Exercice 14 - Le nombre dérivé d'une somme

Soit $f(x) = x^2 + 3x$. Calculer $f'(1)$ par la définition, puis vérifier que ce résultat est la somme des nombres dérivés de $x \mapsto x^2$ et de $x \mapsto 3x$ en 1.

Exercice 15 - Synthèse : la tangente et la courbe

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

- a) Calculer $f'(1)$ par la définition.
- b) En déduire une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 1.
- c) Étudier la position de la courbe par rapport à T .