

Plaque 2 - Fréquences observées, intervalles de fluctuation et simulation

Échantillonnage — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Vocabulaire.

Terme	Sens
proportion p	caractéristique de la population (inconnue en général)
fréquence f	caractéristique de l' échantillon (observée)
fluctuation d'échantillonnage	la fréquence varie d'un échantillon à l'autre

Modèle. Si l'échantillon de taille n est prélevé au hasard avec remise (ou dans une population très grande), le nombre de succès X suit la loi **binomiale** $B(n; p)$, et $F = \frac{X}{n}$ est la fréquence.

$$E(X) = np \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

$$E(F) = p \quad \sigma(F) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

Intervalle de fluctuation au seuil de 95 % (approximation courante) :

$$\left[p - \frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + \frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \quad \text{ou, en effectifs,} \quad [np - 2\sigma ; np + 2\sigma]$$

Amplitude. La demi-amplitude est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$: pour la **diviser par 2**, il faut **quadrupler** n .

Prise de décision.

1. On formule l'hypothèse sur p . 2. On construit l'intervalle de fluctuation pour la taille n de l'échantillon. 3. Si la fréquence observée est **hors** de l'intervalle, on **rejette** l'hypothèse (au risque de 5 %). 4. Sinon, on **ne peut pas** la rejeter — ce qui ne la démontre **pas**.

Simulation.

```
from random import random
```

```
def frequence(n, p):
    s = 0
    for i in range(n):
        if random() < p:
            s = s + 1
    return s / n
```

Correction de l'exercice 1 - Proportion et fréquence

- **Proportion** : $p = 0,4$ — caractéristique de l'**urne**, connue ici.
- **Fréquence observée** : $f = \frac{23}{50} = 0,46$ — caractéristique de l'**échantillon** ✓
- **Modèle** : $X \sim B(50; 0,4)$.

— **Espérance** :

$$E(X) = 50 \times 0,4 = 20$$

— **Écart type** :

$$\sigma(X) = \sqrt{50 \times 0,4 \times 0,6} = \sqrt{12} \approx 3,4641$$

— **Écart observé** : $23 - 20 = 3$, soit $\frac{3}{3,4641} \approx 0,866 \sigma$ — un écart tout à fait **banal** ✓

— **Fréquence attendue** : $E(F) = 0,4$ avec $\sigma(F) = \frac{3,4641}{50} \approx 0,069282$.

— **Intervalle de fluctuation** : $[0,4 - 0,1386; 0,4 + 0,1386] \approx [0,2614; 0,5386]$, qui contient 0,46 ✓

— **Conclusion** : l'observation est **compatible** avec $p = 0,4$.

— **Piège de vocabulaire** : dire « la proportion vaut 0,46 » serait faux — 0,46 est la **fréquence**, qui n'est qu'une estimation de la proportion.

Réponse. $p = 0,4$ (urne), $f = 0,46$ (échantillon) ; $E(X) = 20$ et $\sigma(X) = \sqrt{12} \approx 3,46$.

Correction de l'exercice 2 - Intervalle de fluctuation

— **Paramètres** : $p = 0,5$ et $n = 100$.

— **Écart type de la fréquence** :

$$\sigma(F) = \sqrt{\frac{0,25}{100}} = \frac{0,5}{10} = 0,05$$

— **Intervalle** ($\pm 2\sigma$) :

$$[0,5 - 0,1; 0,5 + 0,1] = [0,4; 0,6]$$

— **En effectifs** : entre 40 et 60 piles.

— **Contrôle** : $\sigma(X) = \sqrt{100 \times 0,25} = 5$, donc $2\sigma = 10$ ✓

— **Lecture** : environ 95 % des séries de 100 lancers donnent entre 40 et 60 piles.

— **Amplitude** : 0,2, soit ± 10 points — c'est **large** pour 100 lancers.

— **Avec** $n = 400$: $\sigma(F) = 0,025$ et l'intervalle devient $[0,45; 0,55]$, deux fois plus étroit ✓

— **Règle du $\frac{1}{\sqrt{n}}$** : la demi-amplitude vaut $\frac{1}{\sqrt{100}} = 0,1$, ce qui coïncide exactement avec le calcul quand $p = 0,5$ ✓

— **Attention** : un résultat de 62 piles sortirait de l'intervalle, sans pour autant **prouver** que la pièce est truquée — il y a 5 % de risque d'erreur.

Réponse. $[0,4; 0,6]$, soit entre 40 et 60 piles.

Correction de l'exercice 3 - Décision sur un dé

— **Hypothèse** : $p = \frac{1}{6} \approx 0,16667$.

— **Paramètres** : $E(X) = \frac{300}{6} = 50$ et

$$\sigma(X) = \sqrt{300 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{250}{6}} \approx 6,4550$$

— **Intervalle de fluctuation** ($\pm 2\sigma$) : $[50 - 12,91; 50 + 12,91] \approx [37,1; 62,9]$.

— **Observation** : $68 \notin [37,1; 62,9]$.

— **Conclusion** : on **rejette** l'hypothèse d'un dé équilibré, au seuil de 95 % ✓

— **En écarts types** : $\frac{68 - 50}{6,455} \approx 2,789 \sigma$ — nettement au-delà de 2 ✓

- **En fréquence** : $f = \frac{68}{300} \approx 0,22667$, contre un intervalle $[0,1237 ; 0,2097]$ ✓
- **Prudence** : il reste environ 5 % de chances de rejeter à tort un dé pourtant équilibré. Avec $2,79\sigma$, le risque réel d'erreur est plutôt de l'ordre de 0,5 %.
- **Conseil pratique** : relancer 300 fois de plus. Si le 6 ressort à nouveau environ 68 fois, la conclusion devient très solide.
- **Estimation du vrai p** : environ 0,227, soit presque $\frac{2}{9}$ — le dé semble nettement biaisé en faveur du 6.

Réponse. Non : $68 \notin [37,1 ; 62,9]$ (écart de $2,79\sigma$).

Correction de l'exercice 4 - Taille d'échantillon

- **Demi-amplitude** : $\frac{2\sqrt{0,25}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- **Condition** : $\frac{1}{\sqrt{n}} < 0,02$, soit $\sqrt{n} > 50$ et

$$n > 2500$$
- **Réponse** : $n \geq 2501$ (en pratique, on retient 2500, où la demi-amplitude vaut exactement 0,02).
- **Vérification** : pour $n = 2500$, $\frac{1}{50} = 0,02$ ✓
- **Intervalle obtenu** : $[0,48 ; 0,52]$ ✓
- **Comparaison** : avec $n = 100$, la demi-amplitude vaut 0,1 — il faut **vingt-cinq fois** plus de monde pour être cinq fois plus précis ✓
- **Coût de la précision** : viser 0,01 demanderait $n = 10\,000$, soit quatre fois plus que pour 0,02 ✓
- **Règle mnémotechnique** : la demi-amplitude vaut environ $\frac{1}{\sqrt{n}}$, donc $n \approx \frac{1}{(\text{précision})^2}$.
- **Contrôle** : $\frac{1}{0,02^2} = \frac{1}{0,0004} = 2500$ ✓
- **Lien avec les sondages** : les instituts interrogent 1000 personnes, ce qui donne $\frac{1}{\sqrt{1000}} \approx 0,0316$, soit les fameux « ± 3 points » ✓

Réponse. $n \geq 2500$ (demi-amplitude $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,02$).

Correction de l'exercice 5 - Sondage électoral

- **Hypothèse à tester** : $p = 0,5$ (candidat à égalité).
- **Écart type de la fréquence** :

$$\sigma(F) = \frac{0,5}{\sqrt{900}} = \frac{0,5}{30} \approx 0,016667$$
- **Intervalle de fluctuation** : $[0,5 - 0,033333 ; 0,5 + 0,033333] \approx [0,4667 ; 0,5333]$.
- **Observation** : $0,47 \in [0,4667 ; 0,5333]$.
- **Conclusion** : on **ne peut pas** rejeter $p = 0,5$ — il est **impossible** d'affirmer que le candidat est minoritaire ✓
- **En écarts types** : $\frac{0,47 - 0,5}{0,016667} = -1,8\sigma$ — proche de la limite, mais insuffisant ✓
- **En effectifs** : $0,47 \times 900 = 423$ personnes, contre un intervalle $[420 ; 480]$ ✓
- **Marge d'erreur annoncée** : $\pm 3,33$ points.

- **Taille nécessaire pour conclure** : il faudrait que $0,03 > \frac{1}{\sqrt{n}}$, soit $n > 1111$ personnes ✓
- **Vérification** : avec $n = 1600$ et la même fréquence $0,47$, la demi-amplitude tomberait à $0,025$ et l'intervalle $[0,475; 0,525]$ **exclurait** $0,47$ — la conclusion serait alors possible ✓
- **Leçon** : 47% contre 53% sur 900 personnes reste dans la marge d'erreur. C'est le message essentiel face aux sondages serrés.

Réponse. Non : $0,47 \in [0,4667; 0,5333]$ (écart de $1,8\sigma$ seulement).

Correction de l'exercice 6 - Contrôle de fabrication

- **Hypothèse** : $p = 0,03$.
- **Paramètres** : $E(X) = 500 \times 0,03 = 15$ et

$$\sigma(X) = \sqrt{500 \times 0,03 \times 0,97} = \sqrt{14,55} \approx 3,8144$$
- **Intervalle de fluctuation** ($\pm 2\sigma$) : $[15 - 7,63; 15 + 7,63] \approx [7,4; 22,6]$.
- **Observation** : $22 \in [7,4; 22,6]$ — tout juste **dans** l'intervalle.
- **Conclusion** : on **ne peut pas** rejeter l'hypothèse $p = 0,03$; il n'y a pas de preuve statistique qu'il faille régler la machine ✓
- **En écarts types** : $\frac{22 - 15}{3,8144} \approx 1,835\sigma$ — élevé mais sous le seuil de 2 ✓
- **Nuance de gestion** : $1,84\sigma$ est un **signal d'alerte** ; un industriel prudent prélèverait un second échantillon plutôt que d'attendre le franchissement du seuil.
- **Avec 23 pièces défectueuses** : $\frac{8}{3,8144} \approx 2,097\sigma$, hors de l'intervalle — on rejetterait ✓
- **Fréquence observée** : $\frac{22}{500} = 0,044$, contre un intervalle $[0,0147; 0,0453]$ ✓
- **Sur un échantillon double** ($n = 1000$) : si la fréquence restait à $0,044$, on aurait 44 défectueuses contre un intervalle $[19,2; 40,8]$ — cette fois le rejet serait **net** ✓

Réponse. Pas de rejet : $22 \in [7,4; 22,6]$ ($1,84\sigma$) — mais c'est un signal d'alerte.

Correction de l'exercice 7 - Simulation et fluctuation

- **Écart type de la fréquence** :

$$\sigma(F) = \sqrt{\frac{0,3 \times 0,7}{100}} = \sqrt{0,0021} \approx 0,045826$$
- **Demi-amplitude de l'intervalle donné** : $0,39 - 0,3 = 0,09$.
- **En écarts types** : $\frac{0,09}{0,045826} \approx 1,964$ — pratiquement 2σ ✓
- **Proportion attendue hors intervalle** : environ 5% .
- **Réponse** : environ 50 échantillons sur 1000 ✓
- **Contrôle par la binomiale** : $X \sim B(100; 0,3)$, et l'on cherche $P(X \leq 20) + P(X \geq 39)$.
- **Valeurs** : $P(X \leq 20) \approx 0,016463$ et $P(X \geq 39) \approx 0,033979$, de somme $\approx 0,050442$ ✓
- **Estimation affinée** : environ 50 échantillons — l'approximation à 5% était excellente.
- **Fluctuation de ce comptage lui-même** : le nombre d'échantillons hors intervalle suit $B(1000; 0,0504)$, d'espérance $50,4$ et d'écart type

$$\sqrt{1000 \times 0,0504 \times 0,9496} \approx 6,92.$$
- **Intervalle attendu** : environ $[37; 64]$ échantillons — une simulation donnant 50 serait parfaitement normale ✓

- **Leçon** : même le contrôle d'une simulation est soumis à la fluctuation d'échantillonnage.

Réponse. Environ 50 échantillons (calcul exact : 0,0504, soit 50,4).

Correction de l'exercice 8 - Deux échantillons de tailles différentes

- **Écart type de la fréquence** : $\sqrt{\frac{0,16}{n}} = \frac{0,4}{\sqrt{n}}$.
- **Pour** $n = 25$: $\frac{0,4}{5} = 0,08$, donc l'intervalle est
 $[0,2 - 0,16; 0,2 + 0,16] = [0,04; 0,36]$
- **Pour** $n = 400$: $\frac{0,4}{20} = 0,02$, donc
 $[0,2 - 0,04; 0,2 + 0,04] = [0,16; 0,24]$
- **Comparaison** : l'amplitude passe de 0,32 à 0,08, soit une division par 4 = $\sqrt{\frac{400}{25}}$ ✓
- **En effectifs** : [1 ; 9] succès sur 25 contre [64 ; 96] sur 400.
- **Lecture** : avec 25 tirages, une fréquence de 0,32 (soit 8 succès) reste compatible avec $p = 0,2$; avec 400 tirages, elle conduirait à **rejeter** l'hypothèse ✓
- **Remarque sur les petits échantillons** : pour $n = 25$, $np = 5$ seulement — l'approximation par $\pm 2\sigma$ est grossière, et l'intervalle exact serait plutôt [1 ; 9] en effectifs, ce qui correspond ✓
- **Contrôle exact pour** $n = 25$: $P(X \leq 1) \approx 0,027390$ et $P(X \geq 10) \approx 0,017332$ — la somme 0,0447 est bien proche de 5 % ✓
- **Règle pratique** : l'approximation est acceptable quand $np \geq 5$ **et** $n(1 - p) \geq 5$ — ici tout juste vérifié.

Réponse. [0,04 ; 0,36] pour $n = 25$ contre [0,16 ; 0,24] pour $n = 400$.

Correction de l'exercice 9 - Estimation d'une proportion

- **Fréquence observée** : $f = \frac{84}{200} = 0,42$.
- **Intervalle de confiance** (version simple du programme) :

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,42 - \frac{1}{\sqrt{200}}; 0,42 + \frac{1}{\sqrt{200}} \right]$$
- **Calcul** : $\frac{1}{\sqrt{200}} \approx 0,070711$.
 $[0,3493; 0,4907]$
- **Interprétation** : la proportion réelle a environ 95 % de chances d'être dans cet intervalle.
- **Conclusion utile** : l'intervalle est **entièrement en dessous de** 0,5, donc la mesure est très probablement **minoritaire** ✓
- **Version affinée** (avec σ estimé) : $2\sqrt{\frac{0,42 \times 0,58}{200}} \approx 2 \times 0,034900 \approx 0,069800$, soit [0,3502 ; 0,4898] — très proche ✓
- **Amplitude** : environ 0,14, soit ± 7 points.
- **Pour réduire à ± 3 points** : il faudrait $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,03$, soit $n \approx 1111$ personnes ✓
- **Distinction essentielle** : un intervalle de **fluctuation** encadre la **fréquence** connaissant p ; un intervalle de **confiance** encadre p connaissant la fréquence. Les rôles sont inversés.

Réponse. $[0,349; 0,491]$ — la mesure est très probablement minoritaire.

Correction de l'exercice 10 - Lecture d'une simulation

- **Écart type de la fréquence** : $\sqrt{\frac{0,25}{50}} = \frac{0,5}{\sqrt{50}} \approx 0,070711$.
- **Demi-amplitude donnée** : $0,64 - 0,5 = 0,14$.
- **En écarts types** : $\frac{0,14}{0,070711} \approx 1,980$ — presque exactement 2σ ✓
- **Proportion attendue hors intervalle** : environ 5 %, soit 10 échantillons sur 200.
- **Observation** : 9 échantillons.
- **Fluctuation de ce comptage** : il suit $B(200; 0,05)$, d'espérance 10 et d'écart type $\sqrt{200 \times 0,05 \times 0,95} \approx 3,0822$.
- **En écarts types** : $\frac{9 - 10}{3,0822} \approx -0,324\sigma$ — parfaitement **banal** ✓
- **Conclusion** : oui, le résultat est **cohérent** avec la théorie ✓
- **Intervalle attendu pour ce comptage** : $[10 - 6,16; 10 + 6,16] \approx [3,8; 16,2]$, qui contient 9 ✓
- **Contrôle exact** : l'intervalle $[0,36; 0,64]$ correspond à $18 \leq X \leq 32$, et pour $X \sim B(50; 0,5)$ on a $P(X \leq 17) + P(X \geq 33) \approx 2 \times 0,016420 \approx 0,032839$.
- **Prédiction exacte** : $200 \times 0,032839 \approx 6,6$ échantillons — l'intervalle donné est en réalité à 96,7 % et non 95 % ✓
- **Écart à cette prédiction** : $\frac{9 - 6,6}{\sqrt{200 \times 0,0328 \times 0,9672}} \approx \frac{2,4}{2,52} \approx 0,95\sigma$ — banal également ✓
- **Leçon** : l'approximation par $\pm 2\sigma$ donne un intervalle légèrement **trop large** sur un petit échantillon, à cause de la granularité de la loi binomiale.

Réponse. Oui : 9 contre 10 attendus ($-0,32\sigma$) ; le calcul exact prédit 6,6, ce qui reste banal.

Correction de l'exercice 11 - Effet de la proportion

- **Formule** : demi-amplitude $= \frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{400}} = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{10}$.
- **Pour** $p = 0,5$: $\sqrt{0,25} = 0,5$, donc 0,05.
- **Pour** $p = 0,2$: $\sqrt{0,16} = 0,4$, donc 0,04.
- **Pour** $p = 0,05$: $\sqrt{0,0475} \approx 0,21794$, donc $\approx 0,021794$.
- **Conclusion** : la demi-amplitude est **maximale** pour $p = 0,5$ et diminue vers les valeurs extrêmes ✓
- **Justification** : $p(1-p)$ est maximal en $p = 0,5$, où il vaut $\frac{1}{4}$ ✓
- **Amplitude relative** en revanche : $\frac{0,05}{0,5} = 10\%$; $\frac{0,04}{0,2} = 20\%$; $\frac{0,021794}{0,05} \approx 43,6\%$ — l'incertitude **relative** explose pour les petites proportions ✓
- **Conséquence pratique** : estimer une proportion **rare** (une maladie touchant 1 % de la population) demande un échantillon beaucoup plus grand qu'estimer un partage 50/50 ✓
- **Pour** $p = 0,01$: $\sqrt{0,0099} \approx 0,099499$, donc une demi-amplitude de 0,0099 pour une proportion de 0,01 — l'incertitude relative atteint 99 %, l'estimation est **inutilisable** ✓
- **Règle de dimensionnement** : pour une précision relative de 10 % sur p , il faut environ $n \approx \frac{400(1-p)}{p}$ — soit 400 pour $p = 0,5$ mais 39 600 pour $p = 0,01$ ✓

Réponse. 0,05 ; 0,04 ; 0,0218 — maximale en $p = 0,5$, mais incertitude **relative** croissante vers les extrêmes.

Correction de l'exercice 12 - Test sur deux échantillons

- **Fréquences** : $f_A = \frac{24}{30} = 0,8$ et $f_B = \frac{18}{30} = 0,6$.
- **Hypothèse d'un taux commun** : on l'estime par la fréquence globale $\frac{42}{60} = 0,7$.
- **Intervalle de fluctuation** pour $n = 30$ et $p = 0,7$:

$$\sigma(F) = \sqrt{\frac{0,7 \times 0,3}{30}} = \sqrt{0,007} \approx 0,083666$$
- **Intervalle** : $[0,7 - 0,167332 ; 0,7 + 0,167332] \approx [0,5327 ; 0,8673]$.
- **Observations** : $0,8 \in$ l'intervalle ✓ et $0,6 \in$ l'intervalle ✓
- **Conclusion** : chaque classe est **individuellement** compatible avec un taux de 0,7 — on ne peut pas rejeter l'hypothèse d'un taux commun ✓
- **En écarts types** : $\frac{0,8 - 0,7}{0,083666} \approx 1,195 \sigma$ et $\frac{0,6 - 0,7}{0,083666} \approx -1,195 \sigma$ — symétriques et modérés ✓
- **Nuance importante** : l'écart **entre les deux classes** vaut 0,2, soit $2,39 \sigma$ en apparence — mais comparer deux échantillons demande de tenir compte des **deux** fluctuations.
- **Écart type de la différence** : $\sqrt{2} \times 0,083666 \approx 0,11832$, donc $\frac{0,2}{0,11832} \approx 1,690 \sigma$ — toujours sous le seuil de 2 ✓
- **Conclusion finale** : la différence de 6 élèves sur 30 n'est **pas** statistiquement significative.
- **Avec des classes de 100 élèves** aux mêmes fréquences : l'écart type de la différence tomberait à 0,0648, et $\frac{0,2}{0,0648} \approx 3,09 \sigma$ — la différence deviendrait significative ✓

Réponse. Oui : les deux fréquences sont dans $[0,533 ; 0,867]$, et leur écart ne vaut que $1,69 \sigma$.

Correction de l'exercice 13 - Seuil de rejet en effectifs

- **Paramètres** : $E(X) = 200 \times 0,6 = 120$ et

$$\sigma(X) = \sqrt{200 \times 0,6 \times 0,4} = \sqrt{48} \approx 6,9282$$
- **Intervalle de fluctuation** ($\pm 2\sigma$) : $[120 - 13,86 ; 120 + 13,86] \approx [106,1 ; 133,9]$.
- **Seuils de rejet** : on rejette si $X \leq 106$ ou $X \geq 134$ ✓
- **En fréquence** : hors de $[0,5307 ; 0,6693]$, soit $f \leq 0,53$ ou $f \geq 0,67$.
- **Contrôle exact** : $P(X \leq 106) \approx 0,026335$ et $P(X \geq 134) \approx 0,024716$ — la somme $\approx 0,051051$ est bien voisine de 5 % ✓
- **Excellente concordance** : l'approximation par $\pm 2\sigma$ donne ici des seuils quasiment exacts ✓
- **Avec $X = 133$** : on serait dans l'intervalle, donc pas de rejet ; avec $X = 134$, rejet ✓
- **Contrôle** : $\frac{134 - 120}{6,9282} \approx 2,021 \sigma$ et $\frac{133 - 120}{6,9282} \approx 1,876 \sigma$ ✓
- **Zone de décision** : 28 valeurs sur 201 possibles conduisent au rejet — soit environ 14 % des valeurs, mais seulement 5 % de la **probabilité** ✓
- **Lecture** : les valeurs de rejet sont nombreuses mais individuellement très improbables, ce qui est exactement le principe du test.

Réponse. Rejet si $X \leq 106$ ou $X \geq 134$ (intervalle $[106,1 ; 133,9]$).

Correction de l'exercice 14 - Échantillon trop petit

- **Paramètres** : $E(X) = 5$ et $\sigma(X) = \sqrt{2,5} \approx 1,5811$.
- **Approximation** : $[5 - 3,16 ; 5 + 3,16] \approx [1,8 ; 8,2]$, soit en entiers $[2 ; 8]$.
- **Contrôle exact** : $P(2 \leq X \leq 8) = 1 - P(X \leq 1) - P(X \geq 9)$.
- **Valeurs** : $P(X \leq 1) = \frac{1+10}{1024} \approx 0,010742$ et, par symétrie, $P(X \geq 9) \approx 0,010742$.
 $P(2 \leq X \leq 8) \approx 1 - 0,021484 = 0,97852$
- **Intervalle exact au seuil de 95 %** : on cherche le **plus petit** intervalle de probabilité $\geq 0,95$.
- $P(3 \leq X \leq 7) = 1 - 2 \times P(X \leq 2) = 1 - 2 \times \frac{56}{1024} \approx 1 - 0,109375 = 0,89063$ — **insuffisant**.
- **Conclusion** : l'intervalle exact est bien $[2 ; 8]$, mais avec une probabilité de 97,9 % et non 95 % ✓
- **Verdict sur l'approximation** : elle donne les **bons entiers** ici, mais le seuil réel est plus élevé que prévu — l'intervalle est **trop prudent**.
- **Raison** : avec $n = 10$, la loi est très « granuleuse » — on ne peut pas viser 95 % précisément, les sauts de probabilité étant trop gros.
- **Règle** : l'approximation $\pm 2\sigma$ n'est fiable que si $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$; ici $np = 5$, c'est la **limite** ✓
- **Conséquence pratique** : sur de petits échantillons, il faut toujours revenir au **calcul binomial exact**.

Réponse. $[2 ; 8]$ dans les deux cas, mais la probabilité exacte est 97,9 % et non 95 %.

Correction de l'exercice 15 - Fluctuation et loi des grands nombres

- **Formule** : demi-amplitude = $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (pour $p = 0,5$).
- **Valeurs** :

n	demi-amplitude	intervalle
10	0,3162	$[0,184 ; 0,816]$
100	0,1	$[0,400 ; 0,600]$
1000	0,0316	$[0,468 ; 0,532]$
10 000	0,01	$[0,490 ; 0,510]$

- **Observation** : chaque multiplication de n par 100 **divise** la demi-amplitude par 10 ✓
- **Loi des grands nombres** : la fréquence **converge** vers p , et la fluctuation tend vers 0 ✓
- **Lenteur de la convergence** : passer de ± 10 points à ± 1 point demande de multiplier l'effectif par 100 ✓
- **En effectifs** : $\sigma(X) = 0,5\sqrt{n}$ vaut 1,58 ; 5 ; 15,8 ; 50 — l'écart type du **nombre** de succès **croît**, alors que celui de la fréquence décroît ✓
- **Résolution du paradoxe apparent** : le nombre de piles s'écarte de plus en plus de $\frac{n}{2}$ en valeur absolue, mais de moins en moins en **proportion** ✓
- **Contrôle** : pour $n = 10\,000$, l'intervalle en effectifs est $[4900 ; 5100]$, soit ± 100 piles — bien plus qu'à $n = 100$ (± 10) ✓

- **Erreur d'interprétation classique** : croire qu'après une série de faces, les piles « doivent rattraper ». C'est la **proportion** qui se stabilise, pas l'écart absolu.

Réponse. 0,316 ; 0,1 ; 0,0316 ; 0,01 — décroissance en $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : étude de marché

a) **Paramètres** sous l'hypothèse $p = 0,35$:

$$E(X) = 600 \times 0,35 = 210 \quad \sigma(X) = \sqrt{600 \times 0,35 \times 0,65} = \sqrt{136,5} \approx 11,6833$$

- **Intervalle en effectifs** ($\pm 2\sigma$) : $[210 - 23,37 ; 210 + 23,37] \approx [186,6 ; 233,4]$.

- **En fréquence** : $\sigma(F) = \frac{11,6833}{600} \approx 0,019472$, donc
 $[0,35 - 0,038944 ; 0,35 + 0,038944] \approx [0,3111 ; 0,3889] \checkmark$

b) **Observation** : $X = 189$, soit $f = \frac{189}{600} = 0,315$.

- $189 \in [186,6 ; 233,4] \checkmark$ et $0,315 \in [0,3111 ; 0,3889] \checkmark$
- **Conclusion** : on **ne rejette pas** l'hypothèse, mais l'observation est **proche de la borne basse**.
- **En écarts types** : $\frac{189 - 210}{11,6833} \approx -1,798 \sigma$ — juste sous le seuil $\checkmark$

c) **Intervalle de confiance** :

$$\left[0,315 - \frac{1}{\sqrt{600}} ; 0,315 + \frac{1}{\sqrt{600}} \right] \approx [0,315 - 0,040825 ; 0,315 + 0,040825] = [0,2742 ; 0,3558]$$

- **Conclusion** : la vraie proportion est très probablement entre 27,4 % et 35,6 %.
- **L'hypothèse 0,35 est dans cet intervalle**, mais **tout près du bord supérieur** $\checkmark$
- **Cohérence des deux approches** : ne pas rejeter 0,35 (question b) et voir 0,35 dans l'intervalle de confiance (question c) sont deux faces d'un même constat $\checkmark$
- **Recommandation** : l'entreprise devrait refaire un test sur un échantillon plus grand. Avec $n = 2400$ et la même fréquence 0,315, la demi-amplitude tomberait à 0,020412 et l'intervalle $[0,2946 ; 0,3354]$ **exclurait** 0,35 — le 35 % annoncé serait alors réfuté $\checkmark$
- **Version affinée de l'intervalle de confiance** :
 $2\sqrt{\frac{0,315 \times 0,685}{600}} \approx 2 \times 0,018963 \approx 0,037926$, soit $[0,2771 ; 0,3529]$ — cette fois 0,35 est **tout juste exclu**, ce qui illustre la sensibilité de la conclusion à la méthode retenue $\checkmark$

Réponse. a) $[186,6 ; 233,4]$ et $[0,311 ; 0,389]$ · b) pas de rejet ($-1,80 \sigma$) · c) $[0,274 ; 0,356]$, 0,35 tout près du bord.