

Plaquette 1 - Loi binomiale, fluctuation et prise de décision

Échantillonnage — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours à utiliser.

- Schéma de Bernoulli : n épreuves identiques et indépendantes, probabilité de succès p . Le nombre de succès X suit la loi binomiale $B(n; p)$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n$$

- Espérance et écart type : $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$, $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$.
- La **fréquence** observée est $F = \frac{X}{n}$, donc $E(F) = p$.
- **Intervalle de fluctuation** à environ 95 % : plus petit intervalle $[a; b]$ tel que $P(a \leq X \leq b) \geq 0,95$, lu sur la loi binomiale (calculatrice ou tableur), puis converti en fréquences $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right]$.
- Approximation vue en Seconde (valable pour $n \geq 25$ et $0,2 \leq p \leq 0,8$) : $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.
- **Règle de décision** : si la fréquence observée est hors de l'intervalle de fluctuation, on rejette l'hypothèse sur p (risque d'erreur $\approx 5\%$) ; sinon on ne la rejette pas.
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$.

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître un schéma de Bernoulli

Conditions du cours : épreuves **identiques, indépendantes**, à deux issues.

- a) Oui : 20 lancers indépendants, succès « obtenir 6 » de probabilité $\frac{1}{6}$. Donc $X \sim B\left(20; \frac{1}{6}\right)$.

b) Non : sans remise, la composition du jeu change à chaque tirage, les épreuves ne sont pas indépendantes et p n'est pas constant.

c) Oui, en pratique : la population est très grande devant l'échantillon, le prélèvement peut être assimilé à un tirage avec remise. Donc $X \sim B(200; 0,3)$.

Réponse. a) $B\left(20; \frac{1}{6}\right)$ · b) non (sans remise) · c) $B(200; 0,3)$.

Correction de l'exercice 2 - Calculer une probabilité binomiale

On applique la formule du cours :

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \times 0,3^3 \times 0,7^7$$

- Coefficient binomial : $\binom{10}{3} = 120$.
- $0,3^3 = 0,027$.
- $0,7^7 \approx 0,082\,354$.

- Produit : $120 \times 0,027 \times 0,082\,354 \approx 0,266\,8$.
- Donc $P(X = 3) \approx 0,267$.
- Cohérence : $E(X) = np = 3$, donc la valeur la plus probable est proche de 3 ; une probabilité d'environ 27 % est plausible.

Réponse. $P(X = 3) \approx 0,267$.

Correction de l'exercice 3 - Espérance et écart type

Formules du cours : $E(X) = np$, $V(X) = np(1 - p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

- $E(X) = 50 \times 0,4 = 20$.
- $V(X) = 50 \times 0,4 \times 0,6 = 12$.
- $\sigma(X) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3,46$.
- Interprétation : sur un grand nombre d'échantillons de taille 50, on obtient **en moyenne** 20 succès, avec une dispersion typique d'environ 3,5 succès.

Réponse. $E(X) = 20$, $V(X) = 12$, $\sigma(X) \approx 3,46$.

Correction de l'exercice 4 - Au moins un succès

Le nombre X de pièces défectueuses suit $B(25 ; 0,04)$.

- « Au moins une » est l'événement contraire de « aucune » :

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

- $P(X = 0) = \binom{25}{0} \times 0,04^0 \times 0,96^{25} = 0,96^{25} \approx 0,360\,4$.
- Donc $P(X \geq 1) \approx 1 - 0,360 = 0,640$.
- Interprétation : dans près de deux prélèvements sur trois, on trouve au moins une pièce défectueuse, alors que le taux de défaut n'est que de 4 %.

Méthode. Pour « au moins un », on passe toujours par l'événement contraire : un seul calcul au lieu de 25.

Réponse. $P(X \geq 1) \approx 0,640$.

Correction de l'exercice 5 - Intervalle de fluctuation lu sur la loi binomiale

- On cherche $[a ; b]$ tel que $P(a \leq X \leq b) \geq 0,95$. Avec les valeurs fournies :

$$P(40 \leq X \leq 60) = P(X \leq 60) - P(X \leq 39) \approx 0,982 - 0,018 = 0,964 \geq 0,95$$
- En fréquences, on divise par $n = 100$: l'intervalle de fluctuation est $[0,40 ; 0,60]$.
- Intervalle approché de Seconde : $\left[0,5 - \frac{1}{10} ; 0,5 + \frac{1}{10}\right] = [0,40 ; 0,60]$.
- Les deux coïncident ici : l'approximation est excellente pour $p = 0,5$ et $n = 100$.

Réponse. $[0,40 ; 0,60]$, identique à l'intervalle approché.

Correction de l'exercice 6 - Décider si une pièce est truquée

- Hypothèse testée : la pièce est équilibrée, donc $p = 0,5$ et $X \sim B(100 ; 0,5)$.
- Intervalle de fluctuation à 95 % (exercice précédent) : $[0,40 ; 0,60]$ pour la fréquence.
- Fréquence observée : $f = \frac{63}{100} = 0,63$.
- $0,63 \notin [0,40 ; 0,60]$: on **rejette** l'hypothèse d'une pièce équilibrée, au seuil de 95 %.
- Nuance importante : « rejeter au seuil de 95 % » laisse environ 5 % de risque de se tromper. Avec 60 faces au lieu de 63, on n'aurait pas rejeté.

Réponse. Non : $f = 0,63$ est hors de $[0,40 ; 0,60]$, on rejette l'équilibre de la pièce.

Correction de l'exercice 7 - Contrôle de qualité

a) $f = \frac{344}{400} = 0,86$.

b) $\frac{1}{\sqrt{400}} = \frac{1}{20} = 0,05$, donc

$$I = [0,9 - 0,05 ; 0,9 + 0,05] = [0,85 ; 0,95]$$

c) $f = 0,86 \in I$: l'échantillon est **compatible** avec l'annonce du fournisseur, on ne la rejette pas.

- Sur la validité : la condition $0,2 \leq p \leq 0,8$ n'est pas respectée ($p = 0,9$). L'intervalle approché est donc à prendre avec prudence ; avec la loi binomiale $B(400 ; 0,9)$ on trouverait un intervalle un peu plus resserré, d'environ $[0,87 ; 0,93]$, et la conclusion pourrait changer.
- En pratique, dès que p sort de $[0,2 ; 0,8]$, on préfère lire l'intervalle directement sur la loi binomiale.

Réponse. a) 0,86 · b) $[0,85 ; 0,95]$ · c) compatible, mais approximation hors de ses conditions d'emploi.

Correction de l'exercice 8 - Taille d'échantillon et précision

a) L'amplitude de l'intervalle approché vaut $\frac{2}{\sqrt{n}}$. On résout

$$\frac{2}{\sqrt{n}} < 0,02 \Leftrightarrow \sqrt{n} > 100 \Leftrightarrow n > 10\,000$$

- Il faut donc au moins 10 001 personnes — en pratique, un échantillon de 10 000 donne exactement 0,02.
- b) Pour une amplitude de 0,04 : $\sqrt{n} > 50$, donc $n > 2\,500$.
- Conclusion : **diviser l'amplitude par 2 exige de multiplier la taille par 4**. C'est ce qui rend les sondages très précis extrêmement coûteux.

Réponse. a) $n \geq 10\,000$ · b) $n \geq 2\,500$: taille $\times 4$ pour une précision $\times 2$.

Correction de l'exercice 9 - Simulation d'échantillons

a) Intervalle approché : $\frac{1}{\sqrt{100}} = 0,1$, donc $I = [0,3 ; 0,5]$, exactement l'intervalle de l'énoncé.

— Proportion observée d'échantillons dans I : $\frac{952}{1\,000} = 95,2\%$.

— C'est très proche des 95 % annoncés : le résultat est cohérent.

b) La simulation **illustre** le sens de l'intervalle de fluctuation : ce n'est pas une garantie sur un échantillon précis, mais une propriété de l'ensemble des échantillons — environ 95 sur 100 donnent une fréquence dans I .

— Elle montre aussi que les 5 % restants existent bel et bien : ici 48 échantillons sont tombés en dehors, sans que la population ait changé.

Réponse. a) oui, $95,2\% \approx 95\%$ · b) illustrer que l'intervalle concerne l'ensemble des échantillons, pas un échantillon donné.

Correction de l'exercice 10 - Synthèse : un vaccin est-il efficace ?

a) Sous l'hypothèse d'inefficacité, chaque personne vaccinée a la probabilité $p = 0,2$ de tomber malade, indépendamment des autres : $X \sim B(500; 0,2)$.

b) $E(X) = 500 \times 0,2 = 100$ malades attendus.

— $\frac{1}{\sqrt{500}} \approx 0,0447$, donc

$$I \approx [0,2 - 0,045; 0,2 + 0,045] = [0,155; 0,245]$$

c) Fréquence observée : $f = \frac{78}{500} = 0,156$.

- 0,156 appartient (de justesse) à I : au seuil de 95 %, on **ne rejette pas** l'hypothèse d'un vaccin inefficace.
- Autrement dit, l'écart entre 78 et les 100 malades attendus n'est pas suffisant pour conclure statistiquement, même s'il est encourageant.
- Pour trancher, il faudrait un échantillon plus grand : avec $n = 2\,000$ et la même fréquence, l'intervalle deviendrait $[0,178; 0,222]$ et 0,156 serait clairement en dehors.

Réponse. b) $E(X) = 100$, $I \approx [0,155; 0,245]$ · c) on ne peut pas conclure : $f = 0,156 \in I$ (de justesse).