

Plaquette 3 - Prise de décision et intervalles de confiance

Échantillonnage — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Deux démarches à ne jamais confondre.

Démarche	On connaît	On cherche	Intervalle
fluctuation	la proportion p	la fréquence f	centré sur p
confiance	la fréquence f	la proportion p	centré sur f

Intervalle de fluctuation (seuil 95 %) :

$$I_f = \left[p - \frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + \frac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

Intervalle de confiance (niveau 95 %), version du programme :

$$I_c = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Version affinée, plus étroite quand f est loin de 0,5 :

$$\left[f - \frac{2\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} ; f + \frac{2\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}} \right]$$

Protocole de décision.

1. **Hypothèse** : on suppose $p = p_0$. 2. **Intervalle de fluctuation** pour la taille n . 3. **Comparaison** avec la fréquence observée. 4. **Conclusion** : hors de l'intervalle → **rejet** ; dedans → **pas de rejet**.

Les deux risques d'erreur.

- **Rejeter à tort** une hypothèse vraie : environ 5 % par construction.
- **Ne pas rejeter** une hypothèse fausse : risque **non contrôlé**, d'autant plus grand que n est petit.

Formulation prudente obligatoire. « On ne peut pas rejeter l'hypothèse » $\neq$ « l'hypothèse est vraie ». Un échantillon trop petit ne rejette presque rien.

Taille d'échantillon pour une précision δ au niveau 95 % :

$$n \geq \frac{1}{\delta^2}$$

Correction de l'exercice 1 - Décision sur une pièce

- **Hypothèse** : $p = 0,5$.
- **Paramètres** : $E(X) = 125$ et $\sigma(X) = \sqrt{250 \times 0,25} = \sqrt{62,5} \approx 7,9057$.
- **Intervalle de fluctuation** ($\pm 2\sigma$) : $[125 - 15,81 ; 125 + 15,81] \approx [109,2 ; 140,8]$.
- **Observation** : $140 \in [109,2 ; 140,8]$ — tout juste dedans.
- **Conclusion** : on **ne peut pas** rejeter l'hypothèse d'équilibre ✓
- **En écarts types** : $\frac{140 - 125}{7,9057} \approx 1,897 \sigma$ — très proche du seuil de 2 ✓

- **En fréquence** : $f = \frac{140}{250} = 0,56$, contre un intervalle $[0,4368; 0,5632]$ ✓
- **Nuance** : avec 141 piles, on aurait $\frac{16}{7,9057} \approx 2,024\sigma$ et l'on **rejetterait** — la décision tient à un seul lancer !
- **Conseil** : dans une situation aussi limite, la bonne réponse pratique est de **relancer**. Sur 1000 lancers, une fréquence de 0,56 donnerait $\frac{560 - 500}{\sqrt{250}} \approx 3,79\sigma$ — un rejet net ✓
- **Intervalle de confiance pour p** : $\left[0,56 - \frac{1}{\sqrt{250}}; 0,56 + \frac{1}{\sqrt{250}} \right] \approx [0,4968; 0,6232]$, qui contient 0,5 de justesse — même conclusion ✓

Réponse. Pas de rejet : $140 \in [109,2; 140,8]$, mais à $1,90\sigma$ — décision très limite.

Correction de l'exercice 2 - Intervalle de confiance simple

- **Fréquence observée** : $f = \frac{32}{400} = 0,08$.
- **Intervalle de confiance** au niveau 95 % :

$$\left[0,08 - \frac{1}{\sqrt{400}}; 0,08 + \frac{1}{\sqrt{400}} \right] = [0,08 - 0,05; 0,08 + 0,05] = [0,03; 0,13]$$
- **Interprétation** : la proportion réelle est très probablement entre 3 % et 13 %.
- **Critique de cette version** : l'intervalle est **très large** pour une proportion de 8 % — l'incertitude relative atteint 62,5 % !
- **Version affinée** : $2\sqrt{\frac{0,08 \times 0,92}{400}} = 2 \times 0,013565 \approx 0,027129$, soit
 $[0,0529; 0,1071]$
- **Comparaison** : l'intervalle affiné est **presque deux fois plus étroit** ✓
- **Pourquoi** : la version $\frac{1}{\sqrt{n}}$ utilise la majoration $f(1-f) \leq \frac{1}{4}$, très pessimiste quand f est loin de 0,5 ✓
- **Contrôle** : $\sqrt{0,08 \times 0,92} \approx 0,27129$, à comparer à 0,5 — soit presque deux fois moins ✓
- **Taille pour une précision de 1 point** (version affinée) : $2\sqrt{\frac{0,0736}{n}} < 0,01$ donne $n > 2944$ pièces ✓
- **Recommandation** : pour une proportion faible, toujours préférer la version affinée, sous peine d'annoncer une incertitude démesurée.

Réponse. $[0,03; 0,13]$ (version simple) ou $[0,053; 0,107]$ (version affinée, préférable ici).

Correction de l'exercice 3 - Comparaison des deux intervalles

- **Version simple** : $\frac{1}{\sqrt{100}} = 0,1$, donc
 $[0,4; 0,6]$
- **Version affinée** : $2\sqrt{\frac{0,25}{100}} = 2 \times 0,05 = 0,1$, donc
 $[0,4; 0,6]$
- **Conclusion** : les deux versions **coïncident exactement** quand $f = 0,5$ ✓
- **Explication** : $2\sqrt{f(1-f)} = 2 \times 0,5 = 1$, donc la formule affinée devient $\frac{1}{\sqrt{n}}$ — la version simple est le **cas le plus défavorable** ✓

- **Pour** $f = 0,3$: $2\sqrt{0,21} \approx 0,91652$, donc l'affinée donne $\frac{0,91652}{10} \approx 0,091652$ contre 0,1 — un gain de 8,3 %.
- **Pour** $f = 0,1$: $2\sqrt{0,09} = 0,6$, donc 0,06 contre 0,1 — un gain de 40 % ✓
- **Pour** $f = 0,02$: $2\sqrt{0,0196} = 0,28$, donc 0,028 contre 0,1 — un gain de 72 % ✓
- **Règle** : la version simple est toujours **plus large ou égale** — elle est donc **sûre**, mais imprécise pour les fréquences extrêmes.
- **Limite de l'affinée** : quand $f = 0$, elle donne l'intervalle réduit au point $\{0\}$, ce qui est manifestement faux — il faut alors revenir à la version simple ou à un calcul exact ✓

Réponse. Les deux valent $[0,4 ; 0,6]$: elles coïncident pour $f = 0,5$, cas le plus défavorable.

Correction de l'exercice 4 - Risque de seconde espèce

- **Intervalle de fluctuation** sous l'hypothèse $p = 0,5$: $E(X) = 50$, $\sigma(X) = 5$, donc $[40 ; 60]$.
- **Non-détection** : on ne rejette pas si $40 \leq X \leq 60$.
- **Loi réelle** : $X \sim B(100 ; 0,55)$, avec $E(X) = 55$ et $\sigma(X) = \sqrt{100 \times 0,55 \times 0,45} = \sqrt{24,75} \approx 4,9749$.
- **Probabilité de non-détection** :

$$P(40 \leq X \leq 60) \approx 0,86481$$
- **Conclusion** : dans plus de 86 % des cas, le biais **passé inaperçu** ✓
- **Nom** : c'est le **risque de seconde espèce** — ne pas rejeter une hypothèse fausse.
- **Pourquoi si élevé** : 60 est à $\frac{60 - 55}{4,9749} \approx 1,005 \sigma$ de l'espérance réelle, donc largement atteignable ✓
- **Avec** $n = 1000$: l'intervalle sous $p = 0,5$ devient $[468 ; 532]$, alors que la loi réelle a pour espérance 550 et pour écart type $\approx 15,73$.
- **Non-détection** : 532 est à $\frac{532 - 550}{15,73} \approx -1,144 \sigma$, donc $P(X \leq 532) \approx 0,1330$ — le risque tombe à environ 13 % ✓
- **Avec** $n = 10\,000$: le risque devient négligeable ($< 10^{-4}$).
- **Leçon fondamentale** : « ne pas rejeter » ne prouve **rien** si l'échantillon est petit. C'est pourquoi on écrit toujours « on ne peut pas rejeter », jamais « l'hypothèse est vraie ».

Réponse. Environ 86 % de non-détection avec $n = 100$; 13 % avec $n = 1000$.

Correction de l'exercice 5 - Dimensionner une étude

- **Condition** (version simple) : $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,02$, soit $\sqrt{n} \geq 50$ et

$$n \geq 2500$$
- **Pour ± 1 point** : $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,01$ donne $\sqrt{n} \geq 100$ et

$$n \geq 10\,000$$
- **Observation** : diviser la marge par 2 **quadruple** l'effectif ✓
- **Règle** : $n \geq \frac{1}{\delta^2}$ ✓
- **Contrôles** : $\frac{1}{0,02^2} = 2500$ ✓ et $\frac{1}{0,01^2} = 10\,000$ ✓

- **Si l'on sait p proche de 0,1** (version affinée) : $2\sqrt{\frac{0,09}{n}} \leq 0,02$ donne $\frac{0,6}{\sqrt{n}} \leq 0,02$, soit $\sqrt{n} \geq 30$ et $n \geq 900$ — **près de trois fois moins** ✓
- **Pour ± 1 point avec $p \approx 0,1$** : $n \geq 3600$ ✓
- **Coût réel d'un sondage** : chaque personne interrogée coûte de l'ordre de quelques euros ; passer de ± 3 à ± 1 point multiplie le budget par 9 — d'où le standard de 1000 personnes ✓
- **Contrôle** : $\frac{1}{0,03^2} \approx 1111$, très proche du standard ✓
- **Leçon économique** : la précision coûte au **carré**, ce qui explique pourquoi les sondages n'annoncent jamais mieux que ± 2 points.

Réponse. $n \geq 2500$ pour ± 2 points, $n \geq 10\,000$ pour ± 1 point.

Correction de l'exercice 6 - Décision sur une proportion annoncée

- **Hypothèse** : $p = 0,8$.
- **Paramètres** : $E(X) = 120$ et $\sigma(X) = \sqrt{150 \times 0,8 \times 0,2} = \sqrt{24} \approx 4,8990$.
- **Intervalle de fluctuation** ($\pm 2\sigma$) : $[120 - 9,80 ; 120 + 9,80] \approx [110,2 ; 129,8]$.
- **Observation** : $108 \notin [110,2 ; 129,8]$.
- **Conclusion** : on **rejette** l'annonce du fabricant au seuil de 95 % ✓
- **En écarts types** : $\frac{108 - 120}{4,8990} \approx -2,449 \sigma$ ✓
- **En fréquence** : $f = \frac{108}{150} = 0,72$, contre un intervalle $[0,7347 ; 0,8653]$ ✓
- **Probabilité exacte** : $P(X \leq 108) \approx 0,0116$, soit environ 1,2 % — l'observation est très improbable sous l'hypothèse ✓
- **Intervalle de confiance pour p** : $\left[0,72 - \frac{1}{\sqrt{150}} ; 0,72 + \frac{1}{\sqrt{150}} \right] \approx [0,6383 ; 0,8017]$.
- **Nuance importante** : cet intervalle contient 0,8 de très peu ! Les deux approches ne donnent donc pas exactement le même verdict, la version simple de l'intervalle de confiance étant plus **large** ✓
- **Version affinée** : $2\sqrt{\frac{0,72 \times 0,28}{150}} \approx 2 \times 0,036661 \approx 0,073321$, soit $[0,6467 ; 0,7933]$ — cette fois 0,8 est **exclu**, en accord avec le test ✓
- **Conclusion pratique** : le taux réel de satisfaction est plutôt autour de 72 %, et l'annonce de 80 % n'est pas soutenable.

Réponse. Non : $108 \notin [110,2 ; 129,8]$ ($-2,45 \sigma$, probabilité exacte $\approx 1,2$ %).

Correction de l'exercice 7 - Effet de la taille sur la décision

- **Demi-amplitude** de l'intervalle de fluctuation : $\frac{1}{\sqrt{n}}$.
- **Pour $n = 100$** : 0,1, intervalle $[0,4 ; 0,6]$ — 0,56 est **dedans**, pas de rejet.
- **Pour $n = 400$** : 0,05, intervalle $[0,45 ; 0,55]$ — 0,56 est **hors**, rejet ✓
- **Pour $n = 1000$** : 0,031623, intervalle $[0,4684 ; 0,5316]$ — rejet **net** ✓
- **En écarts types** : $\frac{0,06}{0,05} = 1,2 \sigma$ pour $n = 100$; $2,4 \sigma$ pour $n = 400$; $3,79 \sigma$ pour $n = 1000$ ✓
- **Contrôle** : l'écart en σ est proportionnel à $\sqrt{n}$ — de 100 à 1000, il est multiplié par $\sqrt{10} \approx 3,16$, et $1,2 \times 3,16 = 3,79$ ✓
- **Leçon centrale** : le **même écart** en fréquence devient significatif quand n augmente ✓

- **Taille minimale pour rejeter** : il faut $\frac{1}{\sqrt{n}} < 0,06$, soit $n > 278$ ✓
- **Vérification** : pour $n = 278$, la demi-amplitude vaut $\frac{1}{16,673} \approx 0,059977 < 0,06$ ✓
- **Conséquence méthodologique** : il ne faut **jamais** interpréter une fréquence sans connaître la **taille** de l'échantillon — c'est l'information la plus importante d'un sondage.

Réponse. Pas de rejet pour $n = 100$; rejet pour $n = 400$ et $n = 1000$ (seuil : $n > 278$).

Correction de l'exercice 8 - Lecture critique d'un sondage

- **Intervalle de confiance** : $\frac{1}{\sqrt{600}} \approx 0,040825$, donc
[0,4792 ; 0,5608]
- **Conclusion** : la proportion réelle est très probablement entre 47,9 % et 56,1 %.
- **Ce que l'on ne peut PAS affirmer** : que la majorité approuve, puisque l'intervalle contient 0,5 ✓
- **Version affinée** : $2\sqrt{\frac{0,52 \times 0,48}{600}} \approx 2 \times 0,020396 \approx 0,040792$ — pratiquement identique, car f est proche de 0,5 ✓
- **Test de l'hypothèse** $p = 0,5$: $\sigma(F) = \frac{0,5}{\sqrt{600}} \approx 0,020412$, donc l'intervalle de fluctuation est [0,4592 ; 0,5408], qui contient 0,52 — pas de rejet ✓
- **En écarts types** : $\frac{0,02}{0,020412} \approx 0,980 \sigma$ — très loin d'être significatif ✓
- **Formulation honnête** : « le sondage ne permet pas de trancher entre majorité et minorité ».
- **Taille nécessaire pour trancher** : il faudrait $\frac{1}{\sqrt{n}} < 0,02$, soit $n > 2500$ personnes ✓
- **Marge annoncée** : $\pm 4,1$ points, ce que l'article aurait dû préciser.
- **Réflexe de lecture** : devant tout pourcentage de sondage, calculer mentalement $\frac{1}{\sqrt{n}}$ — pour 600 personnes, c'est ± 4 points, ce qui rend caduques toutes les « évolutions » de 1 ou 2 points.

Réponse. Rien de concluant : l'intervalle [0,479 ; 0,561] contient 0,5 (marge $\pm 4,1$ points).

Correction de l'exercice 9 - Deux sondages successifs

- **Écart type de chaque fréquence** : environ $\frac{0,5}{\sqrt{500}} \approx 0,022361$.
- **Écart type de la différence** (échantillons indépendants) :
 $\sqrt{2} \times 0,022361 \approx 0,031623$
- **Écart observé** : $0,48 - 0,44 = 0,04$.
- **En écarts types** : $\frac{0,04}{0,031623} \approx 1,265 \sigma$ ✓
- **Conclusion** : l'écart n'est **pas significatif** — on ne peut pas affirmer qu'il y a eu une évolution ✓
- **Erreur fréquente** : comparer chaque sondage à l'autre comme si l'un était la vérité. Les **deux** fluctuent, d'où le facteur $\sqrt{2}$ ✓
- **Seuil de significativité** : il faudrait un écart de $2 \times 0,031623 \approx 0,063$, soit plus de 6 points ✓

- **Intervalles de confiance** : $[0,3953 ; 0,4847]$ et $[0,4353 ; 0,5247]$ — ils se **chevauchent** largement ✓
- **Contrôle** : $\frac{1}{\sqrt{500}} \approx 0,044721$ ✓
- **Taille nécessaire** pour détecter 4 points : $2\sqrt{2} \times \frac{0,5}{\sqrt{n}} < 0,04$ donne $\sqrt{n} > 35,36$, soit $n > 1250$ par sondage ✓
- **Leçon journalistique** : une « progression de 4 points » entre deux sondages de 500 personnes n'est **pas** une information — c'est du bruit statistique.

Réponse. Non : l'écart de 4 points ne vaut que $1,27\sigma$ (il faudrait plus de 6 points).

Correction de l'exercice 10 - Contrôle de réception

- **Paramètres** : $E(X) = 250 \times 0,02 = 5$ et

$$\sigma(X) = \sqrt{250 \times 0,02 \times 0,98} = \sqrt{4,9} \approx 2,2136$$
- **Intervalle de fluctuation** ($\pm 2\sigma$) : $[5 - 4,43 ; 5 + 4,43] \approx [0,6 ; 9,4]$.
- **Zone d'acceptation** : $1 \leq X \leq 9$ pièces défectueuses ✓
- **Contrôle exact** : $P(X = 0) = 0,98^{250} \approx 0,0064$ et $P(X \geq 10) \approx 0,0304$.
- **Somme** : $\approx 0,0368$, un peu moins que 5 % — l'intervalle est légèrement **trop large** ✓
- **Remarque sur la borne basse** : trouver **zéro** défectueuse conduirait formellement à rejeter, ce qui est absurde en pratique — un lot parfait est une bonne nouvelle !
- **Correction du protocole** : en contrôle industriel, on n'utilise qu'un test **unilatéral** (rejet si X est trop **grand**), car seul l'excès de défauts est problématique.
- **Zone unilatérale à 5 %** : on rejette si $P(X \geq k) < 0,05$, soit $k = 9$ car $P(X \geq 9) \approx 0,0661$ et $P(X \geq 10) \approx 0,0304$ ✓
- **Conclusion pratique** : on accepte si $X \leq 9$, on rejette si $X \geq 10$ ✓
- **En fréquence** : seuil à $\frac{10}{250} = 0,04$, soit le **double** du taux annoncé ✓
- **Contrôle** : $np = 5 \geq 5$, l'approximation normale est à la limite de validité — d'où l'intérêt du calcul binomial exact ici.

Réponse. Acceptation si $X \leq 9$ défectueuses (test unilatéral) ; l'intervalle bilatéral $[1 ; 9]$ est inadapté ici.

Correction de l'exercice 11 - Estimation avec précision imposée

- **Version affinée** avec $f \approx 0,1$:

$$\frac{2\sqrt{0,1 \times 0,9}}{\sqrt{n}} \leq 0,01 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{0,6}{\sqrt{n}} \leq 0,01$$
- **Résolution** : $\sqrt{n} \geq 60$, donc

$$n \geq 3600$$
- **Vérification** : pour $n = 3600$, $\frac{0,6}{60} = 0,01$ ✓
- **Version simple** : $\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,01$ donnerait $n \geq 10\,000$ — presque **trois fois plus** ✓
- **Gain** : connaître l'ordre de grandeur de p permet d'économiser 6400 questionnaires ✓
- **Précision relative obtenue** : $\frac{0,01}{0,1} = 10\%$ — l'estimation serait « $10\% \pm 1$ point », soit entre 9 % et 11 % ✓
- **Nombre de gauchers attendus** : $3600 \times 0,1 = 360$ personnes, avec

$$\sigma(X) = \sqrt{3600 \times 0,09} = 18$$
 ✓

- **Contrôle** : $\frac{2 \times 18}{3600} = 0,01 \checkmark$ — cohérent.
- **Risque circulaire** : on utilise $f \approx 0,1$ pour dimensionner l'étude qui doit mesurer p . C'est acceptable ici car l'ordre de grandeur est bien établi ; en cas de doute, il faut **surdimensionner** avec la version simple.
- **Compromis usuel** : faire un pré-test sur 200 personnes pour situer p , puis dimensionner l'étude principale $\checkmark$

Réponse. $n \geq 3600$ (contre 10 000 avec la version simple).

Correction de l'exercice 12 - Test unilatéral

- **Hypothèse à réfuter** : $p = 0,6$ (le traitement ne fait pas mieux).
- **Paramètres** : $E(X) = 120$ et $\sigma(X) = \sqrt{200 \times 0,6 \times 0,4} = \sqrt{48} \approx 6,9282$.
- **Test unilatéral** : on cherche si 132 est anormalement **grand**.
- **Seuil unilatéral à 5 %** : environ $E + 1,645\sigma \approx 120 + 11,40 = 131,4 \checkmark$
- **Observation** : $132 > 131,4$.
- **Conclusion** : on **rejette** $p = 0,6$ en faveur de $p > 0,6$ — l'affirmation est étayée $\checkmark$
- **En écarts types** : $\frac{132 - 120}{6,9282} \approx 1,732 \sigma \checkmark$
- **Probabilité exacte** : $P(X \geq 132) \approx 0,0475$, soit moins de 5 % $\checkmark$
- **Comparaison avec un test bilatéral** : l'intervalle $[106,1 ; 133,9]$ **contient** 132, donc un test bilatéral ne rejeterait **pas** $\checkmark$
- **Pourquoi le choix compte** : le test unilatéral est plus **puissant** quand on sait dans quel sens chercher, mais il doit être décidé **avant** de voir les données — sinon on triche.
- **Fréquence observée** : $\frac{132}{200} = 0,66$, contre 0,6 annoncé $\checkmark$
- **Intervalle de confiance affiné** : $2\sqrt{\frac{0,66 \times 0,34}{200}} \approx 2 \times 0,033496 \approx 0,066993$, soit $[0,5930 ; 0,7270]$ — il contient 0,6, ce qui invite à la **prudence** $\checkmark$
- **Conclusion nuancée** : le résultat est **encourageant mais limite** ; une étude sur 600 patients serait décisive.

Réponse. Oui en unilatéral ($P(X \geq 132) \approx 0,047$), mais un test bilatéral ne rejeterait pas.

Correction de l'exercice 13 - Interprétation d'un intervalle

- **a) Faux.** 0,46 est le **centre** de l'intervalle, donc la fréquence observée — pas la proportion, qui reste inconnue $\checkmark$
- **b) Correct** (dans la formulation du programme). Rigoureusement, c'est la **méthode** qui produit un intervalle contenant p dans 95 % des cas, mais cette nuance dépasse le lycée $\checkmark$
- **c) Correct.** L'intervalle contient 0,5 (à sa borne), donc l'hypothèse $p = 0,5$ n'est pas écartée $\checkmark$
- **d) Correct.** L'intervalle de confiance simple est centré sur f , et $\frac{0,42 + 0,50}{2} = 0,46 \checkmark$
- **Déduction de la taille** : la demi-amplitude vaut $0,04 = \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc $\sqrt{n} = 25$ et

$$n = 625$$
- **Contrôle** : $\frac{1}{\sqrt{625}} = \frac{1}{25} = 0,04 \checkmark$
- **Effectif observé** : $0,46 \times 625 = 287,5$ — pas entier, donc la fréquence était en réalité voisine de 0,46 (par exemple $\frac{288}{625} = 0,4608$) $\checkmark$

- **Piège de l'affirmation a)** : confondre estimation et valeur vraie est l'erreur d'interprétation la plus répandue.
- **Rédaction correcte** : « la proportion est estimée à 46 %, avec une marge de ± 4 points au niveau de confiance de 95 % ».

Réponse. b), c) et d) sont correctes ; a) est fausse. La taille était $n = 625$.

Correction de l'exercice 14 - Échantillon biaisé

- **Problème** : l'échantillon n'est **pas aléatoire** — il est massivement **biaisé** en faveur des fumeurs ✓
- **Validité de l'intervalle** : **aucune**. Toute la théorie repose sur l'hypothèse d'un tirage **au hasard** dans la population ✓
- **Conséquence** : la fréquence observée estimerait la proportion de fumeurs **parmi les clients d'un bureau de tabac**, pas dans la ville.
- **Ordre de grandeur du biais** : on pourrait trouver $f = 0,7$ là où la proportion réelle est de l'ordre de 0,25 ✓
- **Ce que l'intervalle de confiance ne corrige PAS** : le biais de sélection. Augmenter n **n'améliore rien** — on obtient juste un intervalle étroit autour d'une valeur fausse ✓
- **Illustration** : avec $n = 10\,000$ clients, l'intervalle serait $[0,69; 0,71]$ — très précis et totalement **faux** pour la ville.
- **Distinction essentielle** : la **fluctuation** d'échantillonnage (aléatoire, mesurable, réductible par n) et le **biais** (systématique, non mesurable, non réductible) ✓
- **Protocoles corrects** : tirage aléatoire dans les listes électorales, sondage par quotas représentatifs, interrogation dans des lieux variés à des heures variées.
- **Exemple historique** : le sondage du *Literary Digest* de 1936, sur 2,4 millions de réponses, s'était lourdement trompé sur l'élection présidentielle américaine parce que l'échantillon était issu d'annuaires téléphoniques — donc trop aisé.
- **Leçon** : la **qualité** de l'échantillon passe avant sa **taille**.

Réponse. Échantillon biaisé (non aléatoire) : l'intervalle de confiance n'a aucune validité, et augmenter n n'y change rien.

Correction de l'exercice 15 - Deux méthodes de décision

Par la fluctuation. $\sigma(F) = \frac{0,5}{\sqrt{300}} \approx 0,028868$.

- **Intervalle** : $[0,5 - 0,057735; 0,5 + 0,057735] \approx [0,4423; 0,5577]$.
- **Observation** : $0,56 \notin$ l'intervalle $\rightarrow$ **rejet** ✓
- **En écarts types** : $\frac{0,06}{0,028868} \approx 2,078 \sigma$ ✓

Par la confiance. $\frac{1}{\sqrt{300}} \approx 0,057735$.

- **Intervalle** : $[0,56 - 0,057735; 0,56 + 0,057735] \approx [0,5023; 0,6177]$.
- **Observation** : $0,5 \notin$ l'intervalle $\rightarrow$ **rejet** également ✓

Concordance. Les deux méthodes rejettent, et de très peu dans les deux cas.

- **Explication** : les deux intervalles ont la **même demi-amplitude** ici (car $\sqrt{p(1-p)} = 0,5$ pour $p = 0,5$), l'un centré sur 0,5, l'autre sur 0,56 ✓
- **Équivalence générale** : « f hors de I_f » et « p_0 hors de I_c » sont **équivalents** quand les demi-amplitudes coïncident ✓
- **Cas de divergence** : si p_0 est loin de 0,5, les deux demi-amplitudes diffèrent et les conclusions peuvent s'écarter — c'est ce qu'on a observé dans l'exercice sur le

fabricant ✓

- **Contrôle** : $0,5023 > 0,5$ de $0,0023$, et $0,56 - 0,5577 = 0,0023$ — **le même écart**, ce qui confirme l'équivalence ✓
- **Bonne pratique** : annoncer les deux, la fluctuation pour **décider**, la confiance pour **estimer**.

Réponse. Oui : rejet dans les deux cas ($2,08\sigma$), les deux intervalles ayant la même demi-amplitude $0,0577$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : campagne de vaccination

a) **Paramètres** sous $p = 0,75$:

$$E(X) = 800 \times 0,75 = 600 \quad \sigma(X) = \sqrt{800 \times 0,75 \times 0,25} = \sqrt{150} \approx 12,2474$$

- **Intervalle de fluctuation** ($\pm 2\sigma$) : $[600 - 24,49; 600 + 24,49] \approx [575,5; 624,5]$.
- **Observation** : $576 \in [575,5; 624,5]$ — tout juste dedans.
- **Conclusion** : on **ne rejette pas** $p = 0,75$, mais de très peu ✓
- **En écarts types** : $\frac{576 - 600}{12,2474} \approx -1,960\sigma$ — exactement au seuil ✓
- **Fréquence** : $f = \frac{576}{800} = 0,72$ ✓

b) **Intervalle de confiance** :

$$\left[0,72 - \frac{1}{\sqrt{800}}; 0,72 + \frac{1}{\sqrt{800}} \right] \approx [0,72 - 0,035355; 0,72 + 0,035355] = [0,6846; 0,7554]$$

- **Version affinée** : $2\sqrt{\frac{0,72 \times 0,28}{800}} \approx 2 \times 0,015875 \approx 0,031750$, soit $[0,6883; 0,7518]$ ✓
- **Interprétation** : la couverture réelle est très probablement entre 68,8 % et 75,2 % — l'objectif de 75 % est à la **limite haute**, donc probablement **non atteint** ✓

c) **Trancher entre 0,70 et 0,75** demande une demi-amplitude inférieure à la moitié de l'écart, soit $0,025$.

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < 0,025 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n} > 40 \quad \Leftrightarrow \quad n > 1600$$

- **Réponse** : environ 1600 personnes ✓
- **Version affinée** avec $f \approx 0,72$: $\frac{2 \times 0,44900}{\sqrt{n}} < 0,025$ donne $\sqrt{n} > 35,92$, soit $n > 1290$ ✓
- **Contrôle** : $2\sqrt{0,72 \times 0,28} = 2 \times 0,44900 \approx 0,89800$ ✓
- **Recommandation de santé publique** : reprendre le contrôle sur 1500 personnes. Si la fréquence reste à $0,72$, l'objectif de 75 % sera clairement réfuté et il faudra relancer la campagne.
- **Ordre de grandeur du déficit** : 3 points sur $0,75$, soit environ 4 % de la cible — cela représente tout de même plusieurs milliers de personnes à l'échelle d'une ville de 100 000 habitants ✓

Réponse. a) pas de rejet, mais à $-1,96\sigma$ · b) $[0,685; 0,755]$ · c) environ 1600 personnes.