Plaquette 3 – Écart entre m et μ : la règle des 2σ/√n

Échantillonnage — Première spé maths

Exercices

Méthode

On simule N échantillons de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et d'écart type σ, et l'on calcule la **proportion des cas** où l'écart entre la moyenne m de l'échantillon et μ est inférieur ou égal à $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$. Les simulations montrent que cette proportion est **proche de** 95 %, quelle que soit la variable et dès que n n'est pas trop petit. On s'en sert pour savoir quels écarts sont habituels, et pour choisir une taille d'échantillon.

Exercice 1 – Calculer l'écart de référence

On s'intéresse aux moyennes d'échantillons de lancers d'un dé équilibré ($\mu = 3{,}5$, $\sigma \approx 1{,}708$).

a) Calculer $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ pour $n = 25$, $n = 100$ et $n = 400$ (arrondir au millième).

b) Pour $n = 100$, entre quelles valeurs doit se trouver la moyenne m d'un échantillon pour que $|m - \mu| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$?

c) Un échantillon de 100 lancers a pour moyenne 3,9. La condition est-elle réalisée ?

Exercice 2 – Environ 95 % des échantillons

Pour des lancers d'un dé équilibré, on a simulé 1 000 échantillons de chaque taille n et compté la proportion de ceux dont la moyenne vérifie $|m - 3{,}5| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$:

Taille n	**4**	**25**	**100**	**400**
$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$	1,708	0,683	0,342	0,171
Proportion	94,2 %	95,4 %	95,7 %	95,3 %

a) Que remarque-t-on sur la proportion, et sur l'écart de référence ?

b) Parmi 40 élèves qui simulent chacun un échantillon de 100 lancers, combien peut-on s'attendre à voir obtenir une moyenne en dehors de [3,158 ; 3,842] ?

Exercice 3 – Le cas d'une fréquence

Dans une population, 30 % des personnes ont un certain caractère. On a simulé 1 000 échantillons de 100 personnes et calculé leur fréquence f.

a) Calculer $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ pour la variable de Bernoulli correspondante (arrondir au millième).

b) Entre quelles valeurs doit se trouver f pour que $|f - 0{,}3| \leq \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$? Traduire en effectifs.

c) Dans la simulation, 96,4 % des fréquences vérifient cette condition. Commenter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – La somme de deux dés

On lance deux dés équilibrés et on note S la somme.

a) On admet que $V(S) = \frac{35}{6}$. Calculer $E(S)$ et $\sigma(S)$ (arrondir au millième).

b) Pour des échantillons de 50 lancers, calculer $\frac{2\sigma}{\sqrt{50}}$ et l'intervalle correspondant autour de $E(S)$.

c) Sur 500 échantillons simulés, 94,4 % ont une moyenne dans cet intervalle ; les moyennes extrêmes sont 6,02 et 7,98. Commenter.

Exercice 5 – Un jeu sur cent parties

Au jeu étudié en plaquette 1, le gain X a pour espérance 0,4 € et pour écart type $\sigma \approx 3{,}666$ €.

a) Un joueur fait 100 parties. Calculer $\frac{2\sigma}{\sqrt{100}}$ et en déduire l'intervalle de gains moyens par partie dans lequel il se trouve dans environ 95 % des cas.

b) Une simulation de 1 000 séries de 100 parties donne 96,4 % de séries dont le gain moyen est dans cet intervalle. Le joueur peut-il terminer ses 100 parties en perte ?

c) Combien de parties faudrait-il jouer pour que l'intervalle ne contienne plus de valeur négative ?

Exercice 6 – Programmer le calcul de la proportion

On considère le programme suivant, pour des lancers d'un dé équilibré.

```
from random import randint
from math import sqrt

def moyenne(n):
    return sum([randint(1, 6) for i in range(n)]) / n

def proportion(N, n):
    mu = 3.5
    sigma = sqrt(35 / 12)
    e = 2 * sigma / sqrt(n)
    L = [moyenne(n) for k in range(N)]
    bons = [m for m in L if abs(m - mu) <= e]
    return len(bons) / N
```

a) Que contiennent les listes L et *bons* ?

b) Que renvoie *proportion(1000, 25)* ? Quelle valeur approximative attend-on ?

c) Modifier la fonction pour qu'elle traite une variable de Bernoulli de paramètre p, avec *random()* $< p$.

Exercice 7 – Choisir la taille d'un échantillon

a) Pour des lancers d'un dé équilibré ($\sigma \approx 1{,}708$), quelle taille n faut-il pour que $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0{,}1$?

b) Pour estimer une proportion, quelle taille garantit $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq 0{,}02$ quelle que soit la

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

proportion p ?

c) Un institut dispose d'un budget pour interroger 2 500 personnes. Quel écart de référence peut-il garantir ?

Exercice 8 – Démontrer une majoration

Pour une variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0\,;1]$, on note $g(p) = p(1-p)$.

a) Étudier les variations de g sur $[0\,;1]$ et donner son maximum.

b) En déduire que, pour tout p et tout $n \geq 1$, $\dfrac{2\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

c) Pour $p = 0{,}1$ et $n = 400$, comparer $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Quand la majoration est-elle la plus grossière ?

Exercice 9 – Le réglage d'une machine

Une machine remplit des bouteilles. Bien réglée, le volume versé a pour espérance $\mu = 1\,000$ mL et pour écart type $\sigma = 4$ mL. Chaque heure, on prélève 16 bouteilles et on calcule le volume moyen m.

a) Calculer $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{16}}$. Pour une machine bien réglée, dans quel intervalle se trouve m dans environ 95 % des prélèvements ?

b) Les quatre derniers prélèvements donnent 1 001,3 ; 998,6 ; 997,5 ; 997,1 mL. Lesquels sont habituels pour une machine bien réglée ?

c) Faut-il intervenir sur la machine ?

Exercice 10 – Vrai ou faux sur la règle des 2σ/√n

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier.

a) Pour tout échantillon de taille n, on a $|m - \mu| \leq \dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

b) Si l'on multiplie n par 4, l'écart de référence est divisé par 4.

c) Si l'écart type de la variable double, l'écart de référence double.

d) Sur 1 000 échantillons simulés, environ 50 ont une moyenne qui s'écarte de μ de plus de $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

Exercice 11 – Un sondage serré

Dans une ville, 52 % des électeurs comptent voter pour la candidate A. Un institut interroge 1 000 électeurs tirés au hasard.

a) Calculer $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ pour la variable de Bernoulli « l'électeur vote A » (arrondir au millième).

b) Dans environ 95 % des sondages, entre quelles valeurs se trouve la fréquence de votes pour A ?

c) Un sondage peut-il annoncer la candidate A minoritaire ? Que faudrait-il pour que cela n'arrive presque jamais ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Un histogramme de moyennes

On a simulé 1 000 échantillons de 25 lancers d'un dé équilibré et regroupé leurs moyennes en classes d'amplitude 0,2 :

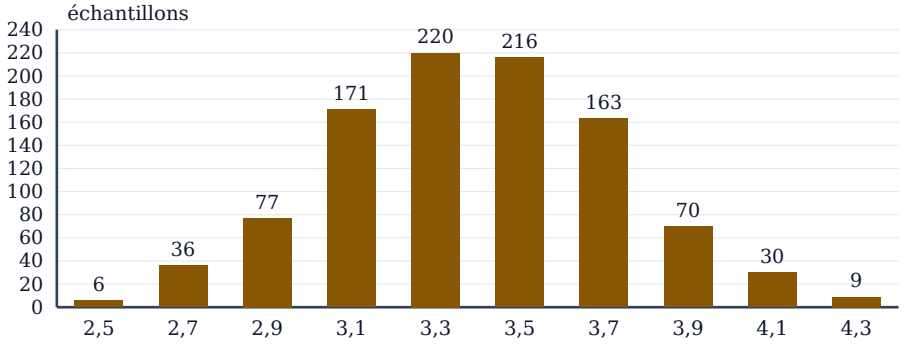
Classe	**[2,5 ; 2,7[**	**[2,7 ; 2,9[**	**[2,9 ; 3,1[**	**[3,1 ; 3,3[**	**[3,3 ; 3,5[**
Effectif	6	36	77	171	220

Classe	**[3,5 ; 3,7[**	**[3,7 ; 3,9[**	**[3,9 ; 4,1[**	**[4,1 ; 4,3[**	**[4,3 ; 4,5[**
Effectif	216	163	70	30	9

Deux moyennes, l'une inférieure à 2,5, l'autre supérieure ou égale à 4,5, ne figurent pas dans le tableau.

a) Quelle proportion des moyennes est comprise dans $[2{,}9\,;4{,}1[$?

b) L'intervalle de référence est ici $[3{,}5-0{,}683\,;3{,}5+0{,}683]$. Pourquoi la proportion de la question a) est-elle plus faible que 95 % ?



Moyennes de 1 000 échantillons de 25 lancers (borne gauche des classes)

Exercice 13 – L'effet de l'écart type

Deux machines remplissent des sachets de café de 250 g en moyenne. Le poids d'un sachet a pour écart type 2 g pour la machine A et 6 g pour la machine B. On contrôle des échantillons de 36 sachets.

a) Calculer l'écart de référence $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{36}}$ pour chaque machine.

b) Un échantillon de la machine B a un poids moyen de 248 g. Est-ce inhabituel ? Et pour la machine A ?

c) Combien de sachets faudrait-il contrôler sur la machine B pour obtenir le même écart de référence que la machine A avec 36 sachets ?

Exercice 14 – Une expérience en classe

Chaque élève d'une classe de 35 lance 50 fois deux dés et calcule la moyenne des sommes obtenues. Le professeur affiche les 35 moyennes au tableau.

a) Rappeler $E(S)$ et $\sigma(S)$ pour la somme de deux dés, puis calculer $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{50}}$.

b) Combien de moyennes s'attend-on à trouver hors de l'intervalle $[6{,}317\,;7{,}683]$?

c) Le professeur réunit les $35\times 50 = 1\,750$ lancers. Calculer l'écart de référence pour cette moyenne globale.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : le contrôle d’un lot de piles

Un fabricant annonce que ses piles ont une durée de vie moyenne de $\mu = 40$ heures, avec un écart type $\sigma = 6$ heures. Une association de consommateurs teste n piles et calcule leur durée de vie moyenne m.

a) Pour $n = 25$, calculer l’écart de référence et l’intervalle correspondant autour de μ.

b) L’association obtient $m = 37{,}1$ heures avec 25 piles. Ce résultat est-il habituel si l’annonce du fabricant est exacte ?

c) Écrire une fonction Python *duree()* qui simule la durée de vie d’une pile, en admettant (modèle simplifié) qu’elle vaut 34 h ou 46 h avec la même probabilité. Vérifier que ce modèle a bien pour espérance 40 et pour écart type 6.

d) Écrire une fonction *test(N, n)* qui simule N contrôles de n piles et renvoie la proportion de contrôles dont la moyenne est à moins de $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ de 40.

e) L’association recommence avec 100 piles et trouve $m = 39{,}2$ heures. Que peut-elle conclure au sujet de l’annonce ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).