

Plaquette 2 - Fréquences observées, intervalles de fluctuation et simulation

Échantillonnage — Première spé maths

Exercices

Méthode

On distingue **proportion** (dans la population) et **fréquence** (dans l'échantillon), on construit un **intervalle de fluctuation**, et on l'utilise pour juger si une observation est compatible avec une hypothèse.

Exercice 1 - Proportion et fréquence

Dans une urne contenant 40 % de boules rouges, on tire 50 boules avec remise et l'on en trouve 23 rouges. Distinguer proportion et fréquence, puis calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 2 - Intervalle de fluctuation

Une pièce équilibrée est lancée 100 fois. Déterminer l'intervalle de fluctuation de la fréquence de « pile » au seuil de 95 %.

Exercice 3 - Décision sur un dé

On lance un dé 300 fois et l'on obtient 68 fois le 6. Le dé est-il équilibré ?

Exercice 4 - Taille d'échantillon

Quelle taille d'échantillon faut-il pour que la demi-amplitude de l'intervalle de fluctuation (avec $p = 0,5$) soit inférieure à 0,02 ?

Exercice 5 - Sondage électoral

Un sondage sur 900 personnes donne 47 % d'intentions favorables. Peut-on affirmer que le candidat est minoritaire ?

Exercice 6 - Contrôle de fabrication

Une machine doit produire au plus 3 % de pièces défectueuses. Sur 500 pièces, on en trouve 22 défectueuses. Faut-il régler la machine ?

Exercice 7 - Simulation et fluctuation

On simule 1000 échantillons de taille 100 avec $p = 0,3$. Combien d'échantillons devraient donner une fréquence hors de $[0,21 ; 0,39]$?

Exercice 8 - Deux échantillons de tailles différentes

Avec $p = 0,2$, comparer les intervalles de fluctuation pour $n = 25$ et $n = 400$.

Exercice 9 - Estimation d'une proportion

Sur 200 personnes interrogées, 84 approuvent une mesure. Donner un intervalle de confiance de la proportion au niveau de 95 %.

Exercice 10 - Lecture d'une simulation

Une simulation de 200 échantillons de taille 50 avec $p = 0,5$ donne 9 échantillons de fréquence hors de $[0,36 ; 0,64]$. Est-ce cohérent ?

Exercice 11 - Effet de la proportion

Pour $n = 400$, comparer les demi-amplitudes de l'intervalle de fluctuation pour $p = 0,5$, $p = 0,2$ et $p = 0,05$.

Exercice 12 - Test sur deux échantillons

Deux classes passent le même test. Dans la classe A (30 élèves), 24 réussissent ; dans la classe B (30 élèves), 18 réussissent. Ces résultats sont-ils compatibles avec un même taux de réussite ?

Exercice 13 - Seuil de rejet en effectifs

Pour $n = 200$ et $p = 0,6$, déterminer à partir de quel nombre de succès on rejette l'hypothèse.

Exercice 14 - Échantillon trop petit

Pour $n = 10$ et $p = 0,5$, l'approximation par $\pm 2\sigma$ est-elle satisfaisante ? Comparer à l'intervalle exact.

Exercice 15 - Fluctuation et loi des grands nombres

Pour $p = 0,5$, calculer la demi-amplitude de l'intervalle de fluctuation pour $n = 10$, 100, 1000 et 10 000, puis commenter.

Exercice 16 - Synthèse : étude de marché

Une entreprise estime que 35 % des consommateurs apprécient son produit. Un test sur 600 personnes donne 189 avis favorables.

- Déterminer l'intervalle de fluctuation en effectifs et en fréquence.
- L'hypothèse est-elle rejetée ?
- Donner un intervalle de confiance pour la vraie proportion et conclure.