

Plaquette 1 - Loi binomiale, fluctuation et prise de décision

Échantillonnage — Première spé maths

Exercices

Méthode

L'échantillonnage de Première s'appuie sur la **loi binomiale** : un échantillon de taille n prélevé au hasard, avec une proportion p de « succès », se modélise par $X \sim B(n; p)$. On calcule des probabilités, on construit un intervalle de fluctuation à partir de la loi, et on décide.

Exercice 1 - Reconnaître un schéma de Bernoulli

Dans chaque cas, dire si le nombre de succès suit une loi binomiale, en précisant n et p le cas échéant.

- On lance 20 fois un dé équilibré et on compte les 6.
- On tire successivement et **sans remise** 5 cartes d'un jeu de 32 et on compte les cœurs.
- On interroge 200 personnes au hasard dans une grande population dont 30 % sont favorables, et on compte les avis favorables.

Exercice 2 - Calculer une probabilité binomiale

Soit $X \sim B(10; 0,3)$. Calculer $P(X = 3)$, arrondi au millième.

Exercice 3 - Espérance et écart type

Soit $X \sim B(50; 0,4)$. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondi au centième). Interpréter $E(X)$.

Exercice 4 - Au moins un succès

Une machine produit 4 % de pièces défectueuses. On prélève au hasard 25 pièces. Calculer la probabilité qu'il y ait **au moins une** pièce défectueuse (arrondi au millième).

Exercice 5 - Intervalle de fluctuation lu sur la loi binomiale

Soit $X \sim B(100; 0,5)$. À la calculatrice, on obtient $P(X \leq 39) \approx 0,018$ et $P(X \leq 60) \approx 0,982$.

Déterminer un intervalle de fluctuation à environ 95 % de la fréquence de succès, puis le comparer à l'intervalle approché $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

Exercice 6 - Décider si une pièce est truquée

On lance 100 fois une pièce et on obtient 63 fois « face ». Peut-on considérer, au seuil de 95 %, que la pièce est équilibrée ?

Exercice 7 - Contrôle de qualité

Un fournisseur garantit que 90 % de ses composants sont conformes. Sur un échantillon de 400 composants, 344 sont conformes.

- Calculer la fréquence observée de composants conformes.
- Déterminer l'intervalle de fluctuation approché à 95 % pour $n = 400$ et $p = 0,9$.
- Conclure. Que faut-il penser de la validité de l'approximation utilisée ?

Exercice 8 - Taille d'échantillon et précision

Un institut veut estimer une proportion avec un intervalle de fluctuation d'amplitude inférieure à 0,02.

- Quelle taille d'échantillon faut-il, avec l'intervalle approché ?
- Comparer avec la taille nécessaire pour une amplitude de 0,04.

Exercice 9 - Simulation d'échantillons

On simule 1 000 échantillons de taille $n = 100$ dans une population où $p = 0,4$, et on note la fréquence observée de chacun. On constate que 952 des fréquences appartiennent à $[0,30 ; 0,50]$.

- Ce résultat est-il cohérent avec l'intervalle de fluctuation à 95 % ?
- Quel est le rôle de cette simulation ?

Exercice 10 - Synthèse : un vaccin est-il efficace ?

Sans vaccin, 20 % des personnes exposées à un virus développent la maladie. Sur 500 personnes vaccinées puis exposées, 78 développent la maladie.

- Modéliser le nombre de malades par une loi binomiale sous l'hypothèse « le vaccin est inefficace ».
- Calculer $E(X)$ et l'intervalle de fluctuation approché à 95 % de la fréquence.
- Le vaccin semble-t-il efficace ?