

Plaquette 4 - Simulations en Python et lecture de résultats

Échantillonnage — Première spé maths

Exercices

Méthode

On **écrit** et on **lit** des scripts de simulation, on compare les **fréquences observées** aux probabilités théoriques, et on utilise la simulation pour **visualiser** la fluctuation d'échantillonnage.

Exercice 1 - Lecture d'un script de simulation

Que simule ce script, et quelle valeur affiche-t-il approximativement ?

```
from random import random

s = 0
for i in range(10000):
    if random() < 0.35:
        s = s + 1
print(s / 10000)
```

Exercice 2 - Corriger un script

Ce script est censé simuler un dé à six faces. Trouver et corriger l'erreur.

```
from random import randint

s = 0
for i in range(600):
    if randint(0, 6) == 6:
        s = s + 1
print(s / 600)
```

Exercice 3 - Simuler une fréquence d'échantillon

Écrire une fonction qui renvoie la fréquence de succès sur un échantillon de taille n pour une probabilité p , puis prévoir la dispersion des résultats pour $n = 50$ et $p = 0,4$.

Exercice 4 - Compter les sorties d'intervalle

Un script simule 500 échantillons de taille 200 avec $p = 0,5$ et compte ceux dont la fréquence sort de $[0,43; 0,57]$. Quel comptage attendre ?

Exercice 5 - Simuler une loi binomiale

Écrire une fonction simulant $B(n; p)$, puis estimer $P(X = k)$ par simulation. Pour $n = 10$, $p = 0,5$, $k = 5$, combien de simulations faut-il pour une précision de $\pm 0,01$?

Exercice 6 - Simulation d'un test de décision

On veut vérifier par simulation que le seuil de 5 % est respecté. Décrire le protocole et le résultat attendu pour $n = 100$, $p = 0,5$ et l'intervalle $[0,4 ; 0,6]$.

Exercice 7 - Estimer π par simulation

Expliquer ce script et évaluer la précision obtenue pour $N = 10^5$.

```
from random import random

N = 100000
c = 0
for i in range(N):
    x, y = random(), random()
    if x*x + y*y <= 1:
        c = c + 1
print(4 * c / N)
```

Exercice 8 - Simuler un tirage sans remise

Écrire un script simulant le tirage de 3 boules **sans remise** dans une urne de 10 boules dont 4 rouges, et comptant les rouges obtenues.

Exercice 9 - Interpréter un histogramme simulé

Une simulation de 2000 échantillons de taille 100 avec $p = 0,3$ donne une moyenne des fréquences de 0,3012. Est-ce cohérent ?

Exercice 10 - Simuler une marche aléatoire

Écrire un script simulant 100 pas d'une marche aléatoire (pas de ± 1 équiprobables) et renvoyant la position finale, puis prévoir la distribution.

Exercice 11 - Fréquence et taille croissante

Un script affiche la fréquence de « pile » pour $n = 10, 100, 1000, 10\,000$ lancers. Quelles valeurs attendre, et que doit-on observer ?

Exercice 12 - Simuler un intervalle de confiance

On simule 1000 échantillons de taille 400 avec $p = 0,6$, et pour chacun on construit l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{400}} ; f + \frac{1}{\sqrt{400}} \right]$. Combien contiendront 0,6 ?

Exercice 13 - Détecter un dé truqué par simulation

Comment utiliser une simulation pour évaluer la puissance d'un test détectant un dé qui donne le 6 avec la probabilité 0,22 au lieu de $\frac{1}{6}$, sur 300 lancers ?

Exercice 14 - Erreur dans une simulation

Ce script est censé estimer $P(X \geq 3)$ pour $X \sim B(10; 0,3)$. Trouver l'erreur.

```
from random import random

c = 0
for i in range(10000):
    s = 0
    for j in range(10):
        if random() < 0.3:
            s = s + 1
    if s > 3:
        c = c + 1
print(c / 10000)
```

Exercice 15 - Nombre de simulations nécessaire

On veut estimer par simulation une probabilité voisine de 0,05 avec une précision relative de 10 %. Combien de simulations ?

Exercice 16 - Synthèse : protocole complet

On soupçonne qu'une machine à sous annonce à tort un taux de gain de 10 %.

- Décrire le protocole de test sur 500 parties.
- Sur 500 parties, on obtient 36 gains. Conclure.
- Estimer par simulation la puissance du test si le vrai taux est 7 %.