Plaquette 4 – Simulations en Python et lecture de résultats

Échantillonnage — Première spé maths

Exercices

Méthode

On écrit, on corrige et on exécute à la main des programmes Python qui simulent des variables aléatoires, construisent des **listes** d'échantillons et de moyennes, puis calculent moyenne, écart type ou proportion. On interprète ensuite les résultats affichés : fluctuation, rapprochement de l'espérance, part des écarts au plus $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$, méthode de Monte-Carlo.

Exercice 1 – Lire un script de simulation

On considère le programme suivant.

```
from random import randint

ech = [randint(1, 6) for i in range(8)]
m = sum(ech) / len(ech)
grands = [x for x in ech if x >= 5]
print(ech, m, len(grands) / len(ech))
```

Une exécution affiche la liste *[6, 2, 5, 1, 3, 6, 4, 5]* suivie de deux nombres.

a) Quels sont ces deux nombres ?

b) Que représentent-ils ? À quelles valeurs théoriques peut-on les comparer ?

Exercice 2 – Corriger un script

Un élève veut la liste des moyennes de N échantillons de n lancers de dé.

```
from random import randint

def moyennes(N, n):
    L = []
    for k in range(N):
        ech = [randint(0, 6) for i in range(n)]
        m = sum(ech) / N
    L.append(m)
    return L
```

Repérer et corriger les trois erreurs.

Exercice 3 – Une fonction écart type

On considère la fonction suivante.

```
from math import sqrt

def ecart_type(L):
    m = sum(L) / len(L)
    carres = [(x - m) ** 2 for x in L]
    return sqrt(sum(carres) / len(L))
```

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Exécuter la fonction à la main pour $L = [2, 4, 4, 6]$.

b) Vérifier le résultat avec la formule « moyenne des carrés moins carré de la moyenne ».

c) Que renvoie *ecart_type([5, 5, 5])* ? Pourquoi ?

Exercice 4 – Simuler une variable de loi donnée

Une variable X suit la loi suivante :

x	-1	**0**	**3**
$P(X = x)$	0,5	0,3	0,2

a) Compléter la fonction pour qu'elle simule X à l'aide d'un entier tiré entre 1 et 10.

```
from random import randint

def X():
    k = randint(1, 10)
    if k <= ...:
        return -1
    elif k <= ...:
        return 0
    return 3
```

b) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$ (arrondir au centième).

c) Écrire une instruction qui affiche la moyenne d'un échantillon de 10 000 valeurs de X. Quelle valeur attend-on ?

Exercice 5 – L'aire sous la parabole

On veut estimer l'aire A du domaine situé sous la parabole $y = x^2$, entre $x = 0$ et $x = 1$, par la méthode de Monte-Carlo.

```
from random import random

def estimation(n):
    dessous = 0
    for i in range(n):
        x = random()
        y = random()
        if y <= x ** 2:
            dessous = dessous + 1
    return dessous / n
```

a) Expliquer pourquoi *estimation(n)* fournit une valeur approchée de A.

b) Une simulation a donné 0,21 pour $n = 100$, 0,353 pour $n = 1\,000$, 0,3403 pour $n = 10\,000$ et 0,33504 pour $n = 100\,000$. Quelle valeur de A peut-on conjecturer ?

c) Le point $M(x\,;y)$ est dans le domaine avec la probabilité A. Calculer l'écart de référence $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ pour $n = 100\,000$, en prenant $A \approx \dfrac{1}{3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Compter les échantillons extrêmes

On dispose d'une liste L contenant les moyennes de 1 000 échantillons de 25 lancers d'un dé équilibré.

a) Écrire une instruction qui calcule le nombre de moyennes supérieures ou égales à 4.

b) Écrire une instruction qui calcule la proportion de moyennes situées hors de l'intervalle $[2{,}817\,;4{,}183]$.

c) Une exécution donne 4,8 % pour la question b). Commenter, sachant que $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{25}} \approx 0{,}683$.

Exercice 7 – Une marche aléatoire

Un pion part de 0 et fait 100 pas de $+1$ ou -1, chacun avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$, indépendamment.

```
from random import random

def marche(n):
    x = 0
    for i in range(n):
        if random() < 0.5:
            x = x + 1
        else:
            x = x - 1
    return x

fins = [marche(100) for k in range(1000)]
print(sum(fins) / 1000, sum([f ** 2 for f in fins]) / 1000)
```

a) On note D un pas. Calculer $E(D)$ et $V(D)$. En déduire l'espérance de la position finale X_{100}, somme de 100 pas.

b) Le programme affiche environ 0,2 puis 95,3. Interpréter ces deux nombres.

c) Les positions finales simulées vont de -34 à 30. Expliquer pourquoi elles sont toutes paires.

Exercice 8 – Un tirage sans remise

Une urne contient 3 boules rouges et 2 boules vertes. On tire successivement deux boules **sans remise**.

```
from random import choice

def deux_boules():
    urne = ["R", "R", "R", "V", "V"]
    b1 = choice(urne)
    urne.remove(b1)
    b2 = choice(urne)
    return b1 + b2
```

a) Expliquer le rôle de l'instruction *urne.remove(b1)*.

b) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Écrire une fonction qui renvoie la fréquence de "*RR*" sur n tirages, à l'aide d'une liste en compréhension.

Exercice 9 – La fréquence des lettres d'un texte

On considère la fonction suivante.

```
def frequence_lettre(texte, lettre):
    lettres = [c for c in texte if c != " "]
    compte = len([c for c in lettres if c == lettre])
    return compte / len(lettres)
```

a) Que contient la liste *lettres* ? Que renvoie la fonction ?

b) Que renvoie *frequence_lettre("le petit chat", "t")* ?

c) Sur un long texte français, la fréquence du « e » est d'environ 0,15 ; sur un texte de 20 lettres, on trouve 0,3. Est-ce surprenant ?

Exercice 10 – Repérer une erreur de simulation

Un élève simule le lancer d'un dé truqué qui donne 6 avec la probabilité 0,3 et chacune des autres faces avec la probabilité 0,14.

```
from random import random, randint

def de_truque():
    if random() < 0.3:
        return 6
    return randint(1, 6)
```

a) Quelle est, avec cette fonction, la probabilité d'obtenir 6 ?

b) Corriger la fonction.

c) Calculer l'espérance du dé truqué.

Exercice 11 – Nombre d'échantillons et taille d'échantillon

Deux élèves étudient les moyennes d'échantillons de lancers de dé.

— Léo simule $N = 10$ échantillons de taille $n = 1\,000$.
— Zoé simule $N = 1\,000$ échantillons de taille $n = 10$.

a) Combien de lancers chacun a-t-il simulés ?

b) Lequel obtient des moyennes très proches de 3,5 ? Lequel peut estimer de façon fiable la proportion d'échantillons dont la moyenne est à moins de $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ de 3,5 ?

c) Quel est le rôle de n et celui de N dans une étude de la fluctuation ?

Exercice 12 – Construire une liste par ajouts successifs

On lance un dé jusqu'à obtenir 6, et l'on garde la liste des résultats.

```
from random import randint

def jusqu_a_six():
    L = []
```

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

```
    d = 0
    while d != 6:
        d = randint(1, 6)
        L.append(d)
    return L
```

a) Une exécution renvoie *[3, 3, 1, 6]*. Que valent *len(L)* et *L[-1]* ?

b) Ce programme renvoie-t-il toujours une liste qui se termine par 6 ? Peut-il renvoyer une liste vide ?

c) Écrire une instruction qui calcule la longueur moyenne des listes obtenues sur 10 000 exécutions. Quelle valeur attend-on ?

Exercice 13 – Indépendance dans une simulation

On veut simuler deux lancers indépendants d'une pièce truquée qui donne « face » avec la probabilité 0,6, et compter les cas où l'on obtient deux « face ».

Un élève écrit :

```
from random import random

def deux_faces():
    u = random()
    return u < 0.6 and u < 0.6
```

a) Avec quelle probabilité cette fonction renvoie-t-elle *True* ? Pourquoi ne simule-t-elle pas l'expérience ?

b) Corriger la fonction et calculer la probabilité théorique d'obtenir deux « face ».

Exercice 14 – Programmer une étude complète

On étudie la variable X égale à 1 avec la probabilité 0,25 et à 0 sinon.

a) Calculer μ, σ et l'écart de référence $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ pour $n = 400$.

b) Écrire une fonction *etude(N, n)* qui simule N échantillons de taille n de X et renvoie la moyenne des moyennes, la plus petite et la plus grande moyenne, et la proportion de moyennes à moins de $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ de μ.

c) Quelles valeurs approximatives s'attend-on à lire pour *etude(1000, 400)* ?

Exercice 15 – Synthèse : le protocole complet

Un jeu consiste à lancer deux dés : on gagne 4 € si l'on obtient un double, et l'on perd 1 € sinon. On note G le gain.

a) Déterminer la loi de G, puis $E(G)$ et $\sigma(G)$ (arrondir au centième).

b) Écrire une fonction *gain()* qui simule G.

c) Écrire une fonction *moyennes(N, n)* qui renvoie la liste des gains moyens de N séries de n parties.

d) Calculer l'écart de référence pour $n = 400$. Si l'on exécute *moyennes(1000, 400)*, combien de gains moyens s'attend-on à trouver hors de l'intervalle correspondant ?

e) Le jeu est-il équitable ? Quelle mise rendrait le jeu équitable si l'on gardait le gain

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

de 4 € pour un double ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).