Plaquette 1 – Simuler une variable aléatoire, moyenne d'un échantillon

Échantillonnage — Première spé maths

Exercices

Méthode

Un **échantillon de taille** n d'une variable aléatoire X est la liste des valeurs obtenues en répétant n fois, de façon indépendante, l'expérience qui définit X. On calcule la loi, l'espérance μ et l'écart type σ de X, on simule X en Python, puis on compare la **moyenne** m **de l'échantillon** à l'espérance : m change d'un échantillon à l'autre, mais se rapproche de μ quand n grandit.

Exercice 1 – Espérance et écart type d'un dé

On lance un dé équilibré et on note X le nombre obtenu.

a) Donner la loi de X et calculer son espérance μ.

b) Calculer $E(X^2)$, puis la variance et l'écart type de X (valeur exacte, puis arrondie au millième).

c) Interpréter μ en termes de moyenne sur un grand nombre de lancers.

Exercice 2 – Variable de Bernoulli

Un joueur de basket réussit un lancer franc avec la probabilité 0,7. On note X la variable qui vaut 1 si le lancer est réussi et 0 sinon.

a) Donner la loi de X, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

b) Démontrer que, pour une variable de Bernoulli de paramètre p, on a $E(X) = p$ et $V(X) = p(1 - p)$.

c) Le joueur tire 10 lancers francs : $1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1$. Calculer la moyenne de cet échantillon. Que représente-t-elle ?

Exercice 3 – Le gain d'un jeu

À un jeu, on gagne 10 € avec la probabilité 0,1, 2 € avec la probabilité 0,3, et on perd 2 € sinon. On note X le gain algébrique.

a) Donner la loi de X et calculer son espérance.

b) Calculer la variance et l'écart type de X (arrondir l'écart type au centième).

c) Le jeu est-il favorable au joueur ? Comment interpréter l'écart type ?

Exercice 4 – Simuler le gain du jeu

On reprend le jeu de l'exercice précédent (10 € avec la probabilité 0,1, 2 € avec 0,3, -2 € sinon).

```
from random import random

def gain():
    u = random()
```

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

```
    if u < 0.1:
        return 10
    elif u < 0.4:
        return 2
    else:
        return -2
```

a) Justifier que la fonction renvoie 2 avec la probabilité 0,3.

b) Que renvoie la fonction lorsque *random()* renvoie 0,05 ? 0,4 ? 0,73 ?

c) Un élève remplace *u < 0.4* par *random() < 0.3*. Pourquoi ne simule-t-il plus le jeu ?

Exercice 5 – La somme de deux dés

On lance deux dés équilibrés ; on note X_1 et X_2 leurs résultats et $S = X_1 + X_2$.

a) Sans déterminer la loi de S, calculer $E(S)$.

b) Écrire une fonction Python *somme()* qui simule S, puis une fonction *echantillon(n)* qui renvoie la liste de n valeurs simulées de S.

c) Un échantillon de taille 50 a pour somme des valeurs 356. Calculer sa moyenne et la comparer à $E(S)$.

Exercice 6 – Calculer la moyenne d'un échantillon

Voici un échantillon de 10 lancers d'un dé équilibré : $5, 1, 4, 4, 5, 1, 2, 4, 4, 3$.

a) Calculer la moyenne m de cet échantillon et l'écart $|m - \mu|$ avec l'espérance $\mu = 3{,}5$.

b) Calculer la fréquence d'apparition de la face 4. Comparer à sa probabilité.

c) Un camarade obtient, avec 10 autres lancers, une moyenne de 4,6. Est-ce le signe d'un dé truqué ?

Exercice 7 – Une fonction qui renvoie la moyenne d'un échantillon

On considère les fonctions suivantes.

```
from random import randint

def X():
    return randint(1, 6)

def moyenne_echantillon(n):
    ech = [X() for i in range(n)]
    return sum(ech) / len(ech)
```

a) Que contient la liste *ech* ? Que vaut *len(ech)* ?

b) Que renvoie *moyenne_echantillon(n)* ? Autour de quelle valeur s'attend-on à la trouver pour $n = 10\,000$?

c) Écrire une version sans liste, qui accumule les valeurs dans une variable.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Dix échantillons de taille 10

On a simulé dix échantillons de 10 lancers d'un dé équilibré. Leurs moyennes sont :

3,4 ; 3,2 ; 2,9 ; 3,6 ; 3,5 ; 3,5 ; 4,6 ; 3,9 ; 4,5 ; 3,5.

a) Calculer l'étendue de cette série de moyennes.

b) Combien de ces moyennes sont à une distance au plus 0,5 de l'espérance $\mu = 3{,}5$?

c) Calculer la moyenne de ces dix moyennes. Que représente-t-elle ?

Exercice 9 – Quand la taille de l'échantillon augmente

On recommence la simulation de l'exercice précédent avec des échantillons plus grands. Pour dix échantillons de chaque taille, on a relevé la plus petite et la plus grande moyenne :

Taille n	**10**	**100**	**1 000**
Plus petite moyenne	2,9	3,13	3,446
Plus grande moyenne	4,6	4,01	3,594

a) Calculer l'étendue des moyennes pour chaque taille.

b) Que constate-t-on ? Relier ce constat à l'espérance de X.

Exercice 10 – La fréquence est une moyenne

Dans une grande ville, 30 % des habitants utilisent le vélo. On interroge des habitants au hasard et on code chaque réponse par 1 (« utilise le vélo ») ou 0.

a) On note X la réponse d'un habitant tiré au hasard. Donner $E(X)$ et l'écart type σ de X (arrondi au millième).

b) Un échantillon de 20 réponses comporte 5 fois la valeur 1. Calculer sa moyenne. Pourquoi est-ce aussi une fréquence ?

c) Expliquer pourquoi tout ce qu'on dit de la moyenne d'un échantillon s'applique à la fréquence observée dans un sondage.

Exercice 11 – Gain moyen observé et espérance

On a simulé le jeu de l'exercice 3 (espérance 0,4 €) en jouant n parties, pour plusieurs valeurs de n :

Nombre de parties n	**10**	**100**	**1 000**	**10 000**
Gain moyen par partie (€)	0,4	−0,2	0,504	0,3952

a) Calculer, pour chaque n, l'écart entre le gain moyen et l'espérance.

b) Pour $n = 100$, le joueur a perdu de l'argent alors que le jeu lui est favorable. Est-ce contradictoire ?

c) Quel gain total le joueur peut-il espérer, environ, sur 10 000 parties ? Et qu'a-t-il obtenu dans la simulation ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Transformer une variable

Un dé équilibré sert à un jeu où l'on marque $Y = 2X + 1$ points, X étant le résultat du dé.

a) Calculer $E(Y)$.

b) Un échantillon de 20 lancers a pour moyenne $m_X = 3{,}8$. Quelle est la moyenne des points marqués lors de ces 20 lancers ? Justifier.

c) On considère $Z = X_1 + X_2$, somme de deux dés, et $T = 2X_1$, double d'un seul dé. Comparer $E(Z)$ et $E(T)$. Les deux variables ont-elles la même loi ?

Exercice 13 – Estimer l'espérance d'un dé déformé

Un dé a été déformé. On ne connaît pas sa loi ; on le lance 2 000 fois et l'on obtient une moyenne des résultats égale à 3,8255.

a) Quelle estimation de l'espérance μ du résultat de ce dé peut-on proposer ? Sur quel résultat repose-t-elle ?

b) Le fabricant indique en fait la loi suivante. Calculer l'espérance exacte.

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,12	0,14	0,16	0,16	0,18	0,24

c) L'estimation de la question a) était-elle bonne ? Ce dé favorise-t-il les grands nombres ?

Exercice 14 – Moyenne d'échantillon ou espérance ?

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier.

a) L'espérance d'une variable aléatoire change d'un échantillon à l'autre.

b) La moyenne d'un échantillon de 1 000 lancers d'un dé équilibré est exactement 3,5.

c) La moyenne d'un échantillon est elle-même le résultat d'une expérience aléatoire.

d) Si X a pour espérance μ, la moyenne d'un échantillon de X est en général d'autant plus proche de μ que l'échantillon est grand.

Exercice 15 – Synthèse : le stand de la kermesse

Pour une kermesse, des élèves conçoivent un jeu : le joueur paie 2 €, tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes et reçoit 10 € pour un as, 4 € pour une figure (roi, dame, valet) et rien sinon.

a) On note G le gain algébrique du joueur (gain reçu moins la mise). Déterminer la loi de G.

b) Calculer $E(G)$ et $\sigma(G)$ (arrondir au centième). Interpréter $E(G)$ pour les organisateurs.

c) Écrire une fonction Python *partie()* qui simule G, et une fonction *moyenne(n)* qui renvoie le gain moyen du joueur sur n parties.

d) Les organisateurs prévoient 400 parties. Quel bénéfice peuvent-ils espérer ? Pourquoi ce bénéfice n'est-il pas garanti ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).