Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : sondages, contrôles et esprit critique

Échantillonnage — Première spé maths

Exercices

Méthode

Des problèmes complets où l'on **modélise** une situation par une variable aléatoire (loi, espérance, écart type), où l'on **estime** une espérance ou une proportion par la moyenne d'un échantillon, et où l'on **juge** un résultat observé à l'aide de l'écart de référence $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$, observé par simulation : un écart plus grand n'arrive que dans environ 5 % des échantillons. Chaque conclusion se rédige avec prudence, en tenant compte de la taille et de la qualité de l'échantillon.

Exercice 1 – Un sondage et sa précision

Un institut interroge 1 200 personnes tirées au hasard : 54 % se déclarent favorables à la semaine de quatre jours.

a) On note p la proportion inconnue de personnes favorables dans la population. En utilisant $\sigma \leq \frac{1}{2}$, majorer l'écart de référence $\frac{2\sigma}{\sqrt{1\,200}}$ (arrondir au millième).

b) Le journal titre : « Une majorité de Français pour la semaine de quatre jours ». Si la proportion réelle était $p = 0{,}5$, une fréquence de 0,54 serait-elle habituelle ?

c) Quelle taille d'échantillon permettrait de garantir un écart de référence d'au plus 0,01 ?

Exercice 2 – Le poids des paquets de pâtes

Une machine remplit des paquets de pâtes. Le poids d'un paquet (en grammes) a pour espérance 500 et pour écart type 8 si la machine est bien réglée. Un inspecteur pèse 64 paquets pris au hasard et trouve un poids moyen de 497,2 g.

a) Calculer l'écart de référence pour $n = 64$.

b) Le résultat de l'inspecteur est-il habituel pour une machine bien réglée ?

c) Le fabricant objecte : « Sur ces 64 paquets, certains pesaient plus de 510 g, la machine ne vole pas les clients. » Que répondre ?

Exercice 3 – Estimer un temps de trajet

Pour estimer le temps moyen μ de trajet domicile-lycée des élèves d'un lycée, on interroge 100 élèves tirés au hasard. Leurs temps ont une moyenne de 24,5 minutes et un écart type de 11 minutes.

a) On admet que l'écart type σ de la variable « temps de trajet d'un élève » est proche de 11. Calculer l'écart de référence pour $n = 100$.

b) Le proviseur affirme que le temps moyen est de 20 minutes. Si c'était le cas, le résultat de l'enquête serait-il habituel ?

c) Le lycée compte 1 500 élèves. Combien d'élèves aurait-il fallu interroger pour que l'écart de référence soit d'au plus 1 minute ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Comparer deux groupes

Une étude compare le temps de sommeil de deux groupes de lycéens tirés au hasard : ceux qui laissent leur téléphone dans leur chambre la nuit ($n_1 = 200$, moyenne 6,9 h) et les autres ($n_2 = 50$, moyenne 7,3 h). Dans les deux groupes, l'écart type des temps de sommeil est d'environ 1,2 h.

a) Calculer l'écart de référence de chaque groupe.

b) Peut-on affirmer, avec ces données, que le second groupe dort plus ?

c) Quelle autre réserve faut-il formuler, même si l'écart était net ?

Exercice 5 – Dimensionner un contrôle

Un fabricant de batteries veut vérifier que l'autonomie moyenne de ses batteries est bien de 10 heures. L'autonomie a pour écart type $\sigma = 0{,}9$ h.

a) Combien de batteries faut-il tester pour que l'écart de référence soit d'au plus 0,1 h ?

b) Chaque test coûte 15 €. Combien coûte ce contrôle ?

c) Le fabricant juge le coût trop élevé et propose de tester 81 batteries. Quel écart de référence obtiendra-t-il ?

Exercice 6 – Critiquer une conclusion

Une marque de céréales annonce que ses paquets contiennent en moyenne 12 g de sucre pour 100 g. Un blogueur achète 4 paquets, les fait analyser et trouve en moyenne 13,1 g. Il publie : « La marque ment sur le sucre ».

On admet que la teneur d'un paquet a pour écart type $\sigma = 1{,}5$ g.

a) Calculer l'écart de référence pour $n = 4$.

b) La conclusion du blogueur est-elle justifiée ?

c) Quelle autre faiblesse présente son échantillon ?

Exercice 7 – Fixer la mise d'un jeu

Un forain propose un jeu : le joueur tire une boule dans une urne de 20 boules (1 boule or, 4 boules argent, 15 boules blanches). Il reçoit 20 € pour la boule or, 5 € pour une boule argent, rien sinon. La partie coûte x euros.

a) Exprimer l'espérance du gain algébrique G du joueur en fonction de x.

b) Pour quelle valeur de x le jeu est-il équitable ?

c) Le forain fixe $x = 2{,}50$ €. Calculer $E(G)$ et $\sigma(G)$ (arrondir au centième).

d) Le forain prévoit 400 parties dans la journée. Entre quelles valeurs se trouvera, dans environ 95 % des cas, son bénéfice total ?

Exercice 8 – Estimer un effectif

Pour estimer le nombre N de papillons d'une espèce dans un parc, des naturalistes en capturent 120, les marquent et les relâchent. Une semaine plus tard, ils capturent 300 papillons de l'espèce : 24 sont marqués.

a) Estimer la proportion p de papillons marqués dans le parc, puis le nombre N.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Un autre naturaliste pense qu'il y a plutôt 2 400 papillons. Quelle serait alors la proportion p de papillons marqués ? Calculer l'écart de référence pour une fréquence observée sur 300 papillons avec cette valeur de p. La fréquence observée serait-elle habituelle ?

c) Pourquoi l'estimation de N est-elle peu précise, malgré 300 papillons capturés ?

Exercice 9 – Le coût des sinistres

Un assureur modélise le coût annuel C (en euros) d'un contrat : $C = 0$ avec la probabilité 0,9, $C = 500$ avec la probabilité 0,08 et $C = 5\,000$ avec la probabilité 0,02.

a) Calculer $E(C)$ et $\sigma(C)$ (arrondir à l'euro).

b) L'assureur gère 2 500 contrats. Calculer l'écart de référence pour le coût moyen par contrat.

c) Il fixe la prime annuelle à 160 € par contrat. Dans environ 95 % des cas, sera-t-il bénéficiaire ?

d) Une petite mutuelle ne gère que 100 contrats, avec la même prime. Est-elle dans la même situation ?

Exercice 10 – Lancers francs et confiance

Une joueuse de basket a réussi 340 lancers francs sur 400 la saison dernière. Cette saison, après 25 tentatives, elle n'en a réussi que 18.

a) Estimer sa probabilité de réussite p d'après la saison dernière.

b) Si p n'a pas changé, quel est l'écart de référence pour la fréquence sur 25 tentatives ? La fréquence de cette saison est-elle inhabituelle ?

c) Son entraîneur veut savoir si elle a régressé. Que lui conseiller ?

Exercice 11 – Les retards de livraison

Un transporteur note R le retard (en jours) d'une livraison : $R = 0$ avec la probabilité 0,7, $R = 1$ avec la probabilité 0,2, $R = 3$ avec la probabilité 0,1.

a) Calculer $E(R)$ et $\sigma(R)$ (arrondir au centième).

b) Un client reçoit 50 livraisons dans l'année, avec un retard moyen de 0,82 jour. Est-ce habituel ?

c) Le transporteur s'engage sur « un retard moyen inférieur à 0,6 jour » pour tout client de plus de 50 livraisons. Cet engagement est-il prudent ?

Exercice 12 – Un taux de réponse trompeur

Une mairie envoie un questionnaire de satisfaction aux 8 000 usagers de sa piscine ; 640 répondent, dont 576 se disent satisfaits.

a) Calculer le taux de réponse et la fréquence de satisfaits parmi les répondants.

b) Calculer l'écart de référence associé à cette fréquence, en prenant $\sigma = \sqrt{0{,}9 \times 0{,}1}$.

c) Le maire annonce : « 90 % des usagers, à 2 points près, sont satisfaits ». Qu'en penser ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 13 – Un dé de casino

Un casino teste un dé en le lançant 3 000 fois. La moyenne des résultats vaut 3,58.

a) Pour un dé équilibré, calculer l'écart de référence pour $n = 3\,000$ ($\sigma \approx 1{,}708$).

b) Le résultat est-il habituel pour un dé équilibré ?

c) Pour aller plus loin, on compte les « 6 » : il y en a 560. Calculer leur fréquence et l'écart de référence pour une fréquence de « 6 » sur 3 000 lancers d'un dé équilibré. Conclure.

Exercice 14 – Multiplier les contrôles

Une agence sanitaire contrôle chaque mois la teneur moyenne en nitrates de l'eau de 60 communes, chacune sur un échantillon de prélèvements. Elle déclare « anormale » une commune dont la moyenne s'écarte de la valeur de référence de plus de $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$.

a) Si l'eau de toutes les communes est parfaitement conforme, combien de communes, environ, seront déclarées « anormales » chaque mois ?

b) Un journaliste découvre qu'une commune a été déclarée « anormale » en mars, et titre « Eau polluée à … ». Qu'en penser ?

c) Quelle règle simple l'agence pourrait-elle adopter pour éviter les fausses alertes ?

Exercice 15 – Synthèse : l'audit d'un centre d'appels

Un centre d'appels s'engage auprès de son client : « durée moyenne d'attente de 2 minutes, et au moins 80 % des appels décrochés en moins de 3 minutes ». Le client fait réaliser un audit sur $n = 144$ appels tirés au hasard dans le mois.

On modélise l'attente A (en minutes) d'un appel, si l'engagement est tenu, par : $A = 1$ avec la probabilité 0,5, $A = 2$ avec 0,3, $A = 4{,}5$ avec 0,2.

a) Vérifier que ce modèle respecte l'engagement (moyenne et proportion des attentes de moins de 3 minutes). Calculer $\sigma(A)$ (arrondir au centième).

b) Calculer l'écart de référence pour la durée moyenne sur 144 appels.

c) L'audit donne une durée moyenne de 2,45 minutes. Est-ce habituel si l'engagement est tenu ?

d) Sur les 144 appels, 106 ont été décrochés en moins de 3 minutes. Calculer la fréquence et l'écart de référence pour une proportion de 0,8. Est-ce habituel ?

e) Écrire une fonction Python *audit()* qui simule les 144 attentes et renvoie la durée moyenne et la fréquence des attentes de moins de 3 minutes.

f) Rédiger une conclusion pour le client.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).