

Plaquette 3 - Dérivées et études de fonctions avec l'exponentielle

Fonction exponentielle — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dériver et étudier.

— Dérivées de référence :

$$(e^x)' = e^x \quad (e^{at})' = a e^{at}$$

— Produit : $(uv)' = u'v + uv'$; quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

— Après dérivation, factoriser : $f(x) = P(x)e^x$ avec $e^x > 0$, donc $f(x)$ a le signe de $P(x)$.

— $f' > 0$ sur un intervalle : f strictement croissante ; $f' < 0$: strictement décroissante.

— Tangente au point d'abscisse a :

$$y = f(a)(x - a) + f(a)$$

Correction de l'exercice 1 - Dérivées de sommes

On dérive terme à terme avec la dérivée de référence

$$(e^x)' = e^x$$

et $(kf)' = kf'$.

a) $f'(x) = 3e^x - 2x$.

b) $g'(x) = e^x + 5$.

c) $h'(x) = -2e^x + x^2$.

Remarque. $g'(x) = e^x + 5 > 0$ pour tout x : g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Réponse. a) $3e^x - 2x$ · b) $e^x + 5$ · c) $-2e^x + x^2$.

Correction de l'exercice 2 - Dériver $e^{(at)}$

On utilise la dérivée de référence

$$(e^{at})' = a e^{at}$$

a) $f'(t) = 4 \times 0,5 e^{0,5t} = 2e^{0,5t} > 0$: f est strictement croissante.

b) $g'(t) = -3e^{-3t} < 0$: g est strictement décroissante.

c) $h'(t) = 10 \times (-0,2)e^{-0,2t} = -2e^{-0,2t} < 0$: h est strictement décroissante.

Le signe de f' est celui de a , multiplié par la constante devant l'exponentielle.

Réponse. a) $2e^{0,5t}$, croissante · b) $-3e^{-3t}$, décroissante · c) $-2e^{-0,2t}$, décroissante.

Correction de l'exercice 3 - Dérivées de produits

Formule du produit, avec $v(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

a) $f(x) = 1 \times e^x + xe^x = (x + 1)e^x$.

b) $g(x) = 2e^x + (2x + 1)e^x = (2x + 3)e^x$.

c) $h(x) = 2xe^x + x^2e^x = (x^2 + 2x)e^x = x(x + 2)e^x$.

La factorisation par e^x prépare l'étude du signe.

Réponse. a) $(x + 1)e^x \cdot$ b) $(2x + 3)e^x \cdot$ c) $x(x + 2)e^x$.

Correction de l'exercice 4 - Dérivées de quotients

Formule du quotient :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\text{a) } u = e^x, v = x : f(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{(x - 1)e^x}{x^2}.$$

$$\text{b) } u = e^x, v = x + 1 : g'(x) = \frac{e^x(x + 1) - e^x}{(x + 1)^2} = \frac{xe^x}{(x + 1)^2}.$$

Les dénominateurs sont des carrés, positifs : $f(x)$ a le signe de $x - 1$ et $g'(x)$ celui de x .

Réponse. a) $\frac{(x - 1)e^x}{x^2} \cdot$ b) $\frac{xe^x}{(x + 1)^2}.$

Correction de l'exercice 5 - Étude d'un minimum

a) Dérivée d'un produit :

$$f(x) = 1 \times e^x + (x - 1)e^x = xe^x$$

Comme $e^x > 0$, $f(x)$ a le signe de x : négative sur $]-\infty ; 0[$, nulle en 0, positive sur $]0 ; +\infty[$.

b) f est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		-	0	+	
$f(x)$		décroît	-1	croît	

Minimum : $f(0) = (0 - 1)e^0 = -1$.

Réponse. $f(x) = xe^x$; minimum -1 en 0.

Correction de l'exercice 6 - Étude d'un maximum

Dérivée d'un produit, avec $u(x) = 2 - x$ et $u'(x) = -1$:

$$f(x) = -e^x + (2 - x)e^x = (1 - x)e^x$$

$e^x > 0$, donc $f(x)$ a le signe de $1 - x$: positive pour $x < 1$, négative pour $x > 1$.

f est croissante sur $]-\infty ; 1]$ puis décroissante sur $[1 ; +\infty[$. Son maximum vaut

$$f(1) = (2 - 1)e^1 = e \approx 2,718$$

Réponse. Croissante puis décroissante ; maximum e en 1.

Correction de l'exercice 7 - Avec e^{-x}

a) Produit, avec $(e^{-x})' = -e^{-x}$ (cas $a = -1$ de $(e^{ax})' = a e^{ax}$) :

$$f(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = (1 - x)e^{-x}$$

b) $e^{-x} > 0$: $f(x)$ a le signe de $1 - x$. f est croissante sur $]-\infty ; 1]$, décroissante sur $[1 ; +\infty[$.

Maximum : $f(1) = 1 \times e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,368$.

Réponse. Maximum $\frac{1}{e} \approx 0,368$ en $x = 1$.

Correction de l'exercice 8 - Tangentes à la courbe de exp

Équation de la tangente au point d'abscisse a , avec $f = \exp$ et $f' = \exp$:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

a) $a = 0$: $f(0) = f'(0) = 1$, d'où $y = x + 1$.

b) $a = 1$: $f(1) = f'(1) = e$, d'où $y = e(x - 1) + e = ex$.

Remarque. La tangente en 1 a pour équation $y = ex$: elle passe par l'origine du repère.

Réponse. a) $y = x + 1$ · b) $y = ex$.

Correction de l'exercice 9 - Tangente à $x \exp(x)$

On a vu que $f(x) = (x + 1)e^x$. On applique

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

— En $a = 0$: $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, d'où $y = x$.

— En $a = -1$: $f(-1) = -e^{-1}$ et $f'(-1) = 0$, d'où $y = -e^{-1} \approx -0,368$.

La tangente en -1 est **horizontale** : $f'(-1) = 0$, c'est le minimum de f .

Réponse. En 0 : $y = x$; en -1 : $y = -\frac{1}{e}$.

Correction de l'exercice 10 - Démontrer une inégalité

a) $g'(x) = e^x - 1$. Par croissance de l'exponentielle :

$$e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

g est décroissante sur $]-\infty ; 0]$, croissante sur $[0 ; +\infty[$.

b) g admet donc un minimum en 0, égal à $g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$. Ainsi $g(x) \geq 0$, c'est-à-dire $e^x \geq x + 1$, pour tout x .

Interprétation. La droite $y = x + 1$ est la tangente en 0 ; la courbe de l'exponentielle est toujours au-dessus de cette tangente.

Réponse. g a pour minimum 0 en 0, donc $e^x \geq x + 1$.

Correction de l'exercice 11 - Comparer à un polynôme

a) $h'(x) = e^x - 1 - x$. D'après l'inégalité connue,

$$e^x \geq x + 1$$

donc $h'(x) \geq 0$ pour tout x : h est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) $h(0) = 1 - 1 - 0 - 0 = 0$. Comme h est croissante : $h(x) \leq 0$ pour $x \leq 0$ et $h(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$.

La courbe de l'exponentielle est sous la parabole pour $x \leq 0$ et au-dessus pour $x \geq 0$; elles se touchent en $(0 ; 1)$.

Réponse. h croissante, $h(0) = 0$: exponentielle sous la parabole pour $x \leq 0$, au-dessus pour $x \geq 0$.

Correction de l'exercice 12 - Concentration d'un médicament

a) Produit de $u(t) = 5t$ et $v(t) = e^{-0,5t}$, avec $v'(t) = -0,5e^{-0,5t}$:

$$C'(t) = 5e^{-0,5t} + 5t \times (-0,5)e^{-0,5t} = (5 - 2,5t)e^{-0,5t}$$

b) $e^{-0,5t} > 0$: $C'(t)$ a le signe de $5 - 2,5t$, positif pour $t < 2$, négatif pour $t > 2$. La

concentration augmente pendant 2 heures, puis diminue.

Maximum : $C(2) = 10 e^{-1} \approx 3,68$ mg/L, atteint au bout de 2 heures.

Réponse. Au bout de 2 h ; environ 3,68 mg/L.

Correction de l'exercice 13 - Nombre dérivé en 0

Avec la dérivée de référence

$$(e^{at})' = a e^{at}$$

le nombre dérivé en 0 vaut $a e^0 = a$. Il faut donc $a = 2$.

La fonction $f(t) = e^{2t}$ vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$: la tangente en 0 a pour équation $y = 2t + 1$.

Réponse. $a = 2$; tangente $y = 2t + 1$.

Correction de l'exercice 14 - Deux extremums

a) Produit : $f(x) = 2x e^x + (x^2 - 3)e^x = (x^2 + 2x - 3)e^x$. Or $(x - 1)(x + 3) = x^2 + 2x - 3$, d'où le résultat.

b) $e^x > 0$: le signe de $f(x)$ est celui du trinôme $(x - 1)(x + 3)$, positif à l'extérieur des racines -3 et 1 .

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		croît	$6e^{-3}$	décroît	$-2e$	croît	

Maximum local : $f(-3) = 6e^{-3} \approx 0,30$; minimum : $f(1) = -2e \approx -5,44$.

Réponse. Croissante, décroissante sur $[-3 ; 1]$, croissante ; $f(-3) \approx 0,30$, $f(1) \approx -5,44$.

Correction de l'exercice 15 - Minimum d'un quotient

a) On a vu que

$$f(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

Sur $]0 ; +\infty[$, $e^x > 0$ et $x^2 > 0$: $f(x)$ a le signe de $x - 1$. f est décroissante sur $]0 ; 1]$ et croissante sur $[1 ; +\infty[$, de minimum $f(1) = e$.

b) Pour tout $x > 0$, $f(x) \geq e$, c'est-à-dire $\frac{e^x}{x} \geq e$. En multipliant par $x > 0$: $e^x \geq ex$.

Interprétation. La droite $y = ex$, tangente en 1, est sous la courbe de l'exponentielle.

Réponse. Minimum e en 1 ; donc $e^x \geq ex$ pour $x > 0$.