

Plaquette 2 - Équations et inéquations avec l'exponentielle

Fonction exponentielle — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Résoudre avec l'exponentielle. Pour tous réels a et b :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \qquad e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

- Penser à $1 = e^0$ et $e = e^1$.
- $e^X > 0$ pour tout X : $e^X = 0$ ou $e^X = -2$ n'ont **aucune** solution, et un facteur e^X ne change pas le signe d'un produit.
- Équation produit : $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.
- Changement d'écriture : avec $X = e^x$, on a $e^{2x} = X^2$.
- Inéquation produit : tableau de signes.

Correction de l'exercice 1 - Égaliser les exposants

L'exponentielle est strictement croissante, donc

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

- a) $2x + 1 = -x + 7 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$.
- b) $5x - 2 = 3 \Leftrightarrow x = 1$.
- c) $4 - x = x \Leftrightarrow x = 2$.

Contrôle de a) : e^5 des deux côtés pour $x = 2$.

Réponse. a) $S = \{2\}$ · b) $S = \{1\}$ · c) $S = \{2\}$.

Correction de l'exercice 2 - Les valeurs 1 et e

On écrit le second membre sous forme exponentielle, avec $1 = e^0$, $e = e^1$ et $\frac{1}{e} = e^{-1}$, puis on égale les exposants :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

- a) $e^{2x-6} = e^0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.
- b) $e^{x+4} = e^1 \Leftrightarrow x + 4 = 1 \Leftrightarrow x = -3$.
- c) $e^{-x} = e^{-1} \Leftrightarrow -x = -1 \Leftrightarrow x = 1$.

Réponse. a) $S = \{3\}$ · b) $S = \{-3\}$ · c) $S = \{1\}$.

Correction de l'exercice 3 - Équations sans solution

On utilise le signe de l'exponentielle :

$$e^X > 0 \quad \text{pour tout réel } X$$

- a) $e^x > 0$ ne peut pas valoir -2 : $S = \emptyset$.
- b) $e^{3x} + 5 = 0 \Leftrightarrow e^{3x} = -5$: impossible, $S = \emptyset$.
- c) e^{2x} ne s'annule jamais : $S = \emptyset$.

À retenir. Avant de résoudre, on vérifie que le second membre est **strictement positif** ; sinon, il n'y a pas de solution.

Réponse. Aucune solution dans les trois cas.

Correction de l'exercice 4 - Exposants du second degré

On égale les exposants, puis on résout une équation du second degré :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

a) $x^2 = 4x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$. Discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4$, racines $\frac{4 \pm 2}{2}$, soit 1 et 3.

b) $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$.

c) $x^2 = 2x \Leftrightarrow x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

Réponse. a) $\{1; 3\}$ · b) $\{-1; 1\}$ · c) $\{0; 2\}$.

Correction de l'exercice 5 - Inéquations simples

L'exponentielle est strictement croissante, elle conserve l'ordre :

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

a) $e^{3x-2} \geq e^0 \Leftrightarrow 3x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3} : S = \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$.

b) $e^{-x} < e^1 \Leftrightarrow -x < 1 \Leftrightarrow x > -1 : S =]-1; +\infty[$ (le sens change en multipliant par -1).

c) $2x \leq x + 1 \Leftrightarrow x \leq 1 : S =]-\infty; 1]$.

Réponse. a) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$ · b) $] -1; +\infty[$ · c) $] -\infty; 1]$.

Correction de l'exercice 6 - Signe d'un produit

Un facteur exponentiel est strictement positif : il ne change pas le signe du produit.

$$e^X > 0 \implies A \times e^X \text{ a le signe de } A$$

a) Signe de $x - 2$: $(x - 2)e^x > 0 \Leftrightarrow x > 2, S =]2; +\infty[$.

b) Signe de x : $S =]-\infty; 0]$.

c) Signe de $1 - 3x$: $1 - 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}, S = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right]$.

Réponse. a) $]2; +\infty[$ · b) $] -\infty; 0]$ · c) $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right]$.

Correction de l'exercice 7 - Comparer à e

On se ramène à deux exponentielles, puis on compare les exposants :

$$e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$$

a) $e^x \geq e^1 \Leftrightarrow x \geq 1 : S = [1; +\infty[$.

b) $1 - 2x < -3 \Leftrightarrow -2x < -4 \Leftrightarrow x > 2 : S =]2; +\infty[$ (division par -2 , le sens change).

Contrôle de b) avec $x = 3$: $e^{-5} < e^{-3}$, vrai.

Réponse. a) $[1; +\infty[$ · b) $]2; +\infty[$.

Correction de l'exercice 8 - Factoriser pour résoudre

On factorise par e^x , avec $e^{2x} = e^x \times e^x$:

$$e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1)$$

Produit nul : $e^x = 0$ (impossible) ou $e^x - 1 = 0$, c'est-à-dire $e^x = e^0$, soit $x = 0$.

$S = \{0\}$. **Contrôle** : $e^0 - e^0 = 0$.

Piège. Simplifier par e^x est permis ici car $e^x \neq 0$; avec un facteur x , ce serait interdit.

Réponse. $S = \{0\}$.

Correction de l'exercice 9 - Équation produit

Produit nul :

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

a) $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$; $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$. $S = \{-3; 0\}$.

b) $e^{-x} \neq 0$, donc il faut $x^2 - 4 = 0$, soit $x = -2$ ou $x = 2$. $S = \{-2; 2\}$.

Réponse. a) $\{-3; 0\}$ · b) $\{-2; 2\}$.

Correction de l'exercice 10 - Poser $X = \exp(x)$

a) $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$: l'équation devient $X^2 - (1 + e)X + e = 0$.

b) En développant :

$$(X - 1)(X - e) = X^2 - eX - X + e = X^2 - (1 + e)X + e$$

Donc $X = 1$ ou $X = e$, c'est-à-dire $e^x = e^0$ ou $e^x = e^1$.

$S = \{0; 1\}$. **Contrôle avec** $x = 1$: $e^2 - (1 + e)e + e = e^2 - e - e^2 + e = 0$.

Réponse. $S = \{0; 1\}$.

Correction de l'exercice 11 - Une inéquation à factoriser

On factorise : $e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1)$. Comme $e^x > 0$, le produit a le signe de $e^x - 1$:

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$$

$S =]0; +\infty[$.

Contrôle. $x = 1$: $e^2 - e \approx 4,67 > 0$; $x = -1$: $e^{-2} - e^{-1} \approx -0,23 < 0$.

Réponse. $S =]0; +\infty[$.

Correction de l'exercice 12 - Deux courbes

a) Les courbes se coupent au point $(0; 1)$. Par le calcul :

$$e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$$

et $e^0 = 1$.

b) Par stricte croissance : $e^x > e^{-x} \Leftrightarrow x > -x \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

$S =]0; +\infty[$: à droite de 0, la courbe de e^x est au-dessus de celle de e^{-x} , ce que confirme la figure.

Réponse. a) $(0; 1)$ · b) $S =]0; +\infty[$.

Correction de l'exercice 13 - Encadrer une exponentielle

La fonction exponentielle est croissante, elle conserve les inégalités :

$$a \leq b \Leftrightarrow e^a \leq e^b$$

a) $0 \leq x \leq 1$ donne $e^0 \leq e^x \leq e^1$, soit $1 \leq e^x \leq e$.

b) $-2 \leq -2x \leq 0$ (multiplication par -2 , le sens change), donc $e^{-2} \leq e^{-2x} \leq 1$.

Puis $-e \leq -e^x \leq -1$, d'où $3 - e \leq 3 - e^x \leq 2$, avec $3 - e \approx 0,28$.

Réponse. a) $[1; e]$ · b) $[e^{-2}; 1]$ et $[3 - e; 2]$.

Correction de l'exercice 14 - Comparer deux exponentielles

Par stricte croissance de l'exponentielle :

$$e^{x^2} \geq e^x \Leftrightarrow x^2 \geq x \Leftrightarrow x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x(x - 1) \geq 0$$

Tableau de signes : $x(x - 1)$ est positif à l'extérieur des racines 0 et 1, négatif entre elles.

$$S =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[.$$

Contrôle. $x = 0,5$: $e^{0,25} \approx 1,28 < e^{0,5} \approx 1,65$, et $0,5 \notin S$.

Réponse. $S =]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[.$

Correction de l'exercice 15 - Tableau de signes complet

On étudie le signe de chaque facteur.

- $e^x - e = 0 \Leftrightarrow x = 1$; négatif pour $x < 1$, positif pour $x > 1$ (croissance).
- $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$: positif pour $x < -2$ et $x > 2$, négatif entre -2 et 2 .

x	$] -\infty; -2[$	$] -2; 1[$	$] 1; 2[$	$] 2; +\infty[$
$e^x - e$	—	—	+	+
$x^2 - 4$	+	—	—	+
produit	—	+	—	+

Le produit est négatif ou nul sur

$$S =]-\infty; -2] \cup [1; 2]$$

(les valeurs -2 , 1 et 2 annulent le produit, elles sont incluses).

Réponse. $S =]-\infty; -2] \cup [1; 2].$