

**Plaquette 4 - Fonctions $t \mapsto \exp(at)$,
suites géométriques et méthode d'Euler**

Fonction exponentielle — Première spé maths
Corrections détaillées

Boîte à outils**Fonctions $t \mapsto e^{at}$.**

— Dérivée et variations :

$$(e^{at})' = a e^{at}$$

croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$.— Les courbes de $t \mapsto e^{kt}$ et $t \mapsto e^{-kt}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.— Suite $u_n = C e^{an}$: géométrie de raison $q = e^a$. Somme :

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \text{ pour } q \neq 1.$$

— Méthode d'Euler pour $f' = f, f(0) = 1$, pas h :

$$f(x+h) \approx (1+h)f(x) \quad \text{donc} \quad e^{nh} \approx (1+h)^n$$

— Valeur approchée de e : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.**Correction de l'exercice 1 - Reconnaître des courbes**Les trois courbes passent par $(0; 1)$, car $e^{k \times 0} = 1$. On les distingue en $t = 1$:

$$e^{0,5} \approx 1,65 \quad e^1 \approx 2,72 \quad e^2 \approx 7,39$$

Plus k est grand, plus la courbe monte vite pour $t > 0$ (et plus elle est basse pour $t < 0$).— C_3 , la plus raide, est celle de e^{2t} ;— C_2 est celle de e^t ;— C_1 , la plus plate, est celle de $e^{0,5t}$.On peut aussi comparer les pentes en 0 : elles valent k (dérivée $k e^{kt}$ en 0).**Réponse.** $C_1 : e^{0,5t} \cdot C_2 : e^t \cdot C_3 : e^{2t}$.**Correction de l'exercice 2 - Symétrie**a) $f(-t) = e^{k(-t)} = e^{-kt} = g(t)$. Le point $(t; g(t))$ est le symétrique du point $(-t; f(-t))$ par rapport à l'axe des ordonnées : les deux courbes sont symétriques par rapport à cet axe.

b) Avec la dérivée de référence

$$(e^{at})' = a e^{at}$$

 $f(t) = k e^{kt} > 0$: f est strictement croissante ; $g'(t) = -k e^{-kt} < 0$: g est strictement décroissante.**Réponse.** a) $f(-t) = g(t)$: courbes symétriques par rapport à l'axe des ordonnées · b) f croissante, g décroissante.

Correction de l'exercice 3 - Variations d'une fonction affine en exp

a) $f(0) = 3 \times 1 + 1 = 4$. Avec $(e^{-2t})' = -2e^{-2t}$:

$$f'(t) = 3 \times (-2)e^{-2t} = -6e^{-2t}$$

b) $e^{-2t} > 0$, donc $f'(t) < 0$: f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

Pour tout t , $3e^{-2t} > 0$, donc $f(t) > 1$. La fonction décroît de 4 vers des valeurs de plus en plus proches de 1 (par exemple $f(3) = 3e^{-6} + 1 \approx 1,007$).

Réponse. a) $f(0) = 4$, $f'(t) = -6e^{-2t}$ · b) strictement décroissante, $f(t) > 1$.

Correction de l'exercice 4 - Une suite géométrique

a) $u_0 = 3$; $u_1 = 3e^{-1} \approx 1,10$; $u_2 = 3e^{-2} \approx 0,41$; $u_3 = 3e^{-3} \approx 0,15$.

b) Pour tout n :

$$u_{n+1} = 3e^{-(n+1)} = 3e^{-n} \times e^{-1} = e^{-1} u_n$$

La suite est géométrique de raison $q = e^{-1} \approx 0,368$ et de premier terme 3. Comme $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, elle est strictement décroissante.

Réponse. a) 3 ; 1,10 ; 0,41 ; 0,15 · b) raison e^{-1} , décroissante.

Correction de l'exercice 5 - Somme de puissances de e

Valeurs approchées. $1 + 2,718 + 7,389 + 20,086 + 54,598 \approx 85,79$.

Formule. Les termes 1, e , e^2 , ... sont ceux d'une suite géométrique de raison $q = e \neq 1$:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Avec $n = 4$: $S = \frac{e^5 - 1}{e - 1} \approx \frac{147,41}{1,7183} \approx 85,79$.

Les deux méthodes concordent ; la seconde donne la valeur exacte $\frac{e^5 - 1}{e - 1}$.

Réponse. $S = \frac{e^5 - 1}{e - 1} \approx 85,79$.

Correction de l'exercice 6 - Euler avec un grand pas

a) Avec $f' = f$, l'approximation affine donne

$$f(x+h) \approx f(x) + hf(x) = (1+h)f(x)$$

donc chaque pas multiplie par 1,5 : 1,5 ; 2,25 ; 3,375 ; 5,0625.

b) Valeurs exactes : $e^{0,5} \approx 1,649$, $e \approx 2,718$, $e^{1,5} \approx 4,482$, $e^2 \approx 7,389$. Les approximations sont trop petites et l'écart grandit à chaque pas.

On améliore la précision en **diminuant le pas** : avec $h = 0,01$, on obtient $f(1) \approx 1,01^{100} \approx 2,705$.

Réponse. a) 1,5 ; 2,25 ; 3,375 ; 5,0625 · b) diminuer le pas.

Correction de l'exercice 7 - Programme d'Euler

a) Le pas vaut $h = \frac{x}{n}$; la boucle multiplie n fois par $1 + h$. La fonction renvoie

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

qui est l'approximation d'Euler de e^x avec n pas.

b) $euler(1, 10)$ renvoie $1,1^{10} \approx 2,594$ (valeur exacte $e \approx 2,718$). $euler(2, 4)$ renvoie $1,5^4 = 5,0625$ (valeur exacte $e^2 \approx 7,389$) : avec seulement 4 pas, l'approximation est grossière.

Réponse. a) $(1 + \frac{x}{n})^n \approx e^x \cdot b) \approx 2,594$ et $5,0625$.

Correction de l'exercice 8 - Approcher le nombre e

a) $a_1 = 2$; $a_{10} = 1,1^{10} \approx 2,594$; $a_{100} = 1,01^{100} \approx 2,705$; $a_{1000} = 1,001^{1000} \approx 2,717$.

Les valeurs se rapprochent de $e \approx 2,718$.

b) C'est la méthode d'Euler pour la fonction exponentielle, sur l'intervalle $[0 ; 1]$ découpé en n pas de longueur $h = \frac{1}{n}$:

$$e^1 = e^{n \times \frac{1}{n}} \approx \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Réponse. a) 2 ; $2,594$; $2,705$; $2,717$ · b) Euler sur $[0 ; 1]$ avec $h = \frac{1}{n}$.

Correction de l'exercice 9 - Euler pour une décroissance

a) Approximation affine, avec $g'(t) = -g(t)$:

$$g(t+h) \approx g(t) + h g'(t) = (1-h) g(t)$$

Avec $h = 0,1$: $g(t+0,1) \approx 0,9 g(t)$.

b) Dix pas de $0,1$ mènent de 0 à 1 : $g(1) \approx 0,9^{10} \approx 0,349$. La valeur exacte est $e^{-1} \approx 0,368$: l'erreur est d'environ $0,02$.

Les approximations forment une suite géométrique de raison $0,9$: c'est l'image discrète de la décroissance exponentielle.

Réponse. b) $0,9^{10} \approx 0,349$, pour $e^{-1} \approx 0,368$.

Correction de l'exercice 10 - Vérifier une équation

a) Avec $(e^{at})' = a e^{at}$:

$$f(t) = 5 \times 2 e^{2t} = 2 \times 5 e^{2t} = 2f(t)$$

et $f(0) = 5e^0 = 5$.

b) Sur le même modèle, $g(t) = 100 e^{-0,3t}$. Vérification :

$$g'(t) = 100 \times (-0,3) e^{-0,3t} = -0,3 g(t) \text{ et } g(0) = 100.$$

À retenir. $t \mapsto C e^{at}$ vérifie $y' = ay$ et $y(0) = C$.

Réponse. b) $g(t) = 100 e^{-0,3t}$.

Correction de l'exercice 11 - Retrouver le coefficient

a) Avec la dérivée de référence

$$f(t) = k e^{kt}$$

on obtient $f(0) = k e^0 = k$, donc $k = -0,3$.

b) $f(t) = -0,3 e^{-0,3t} < 0$ car une exponentielle est strictement positive : f est strictement décroissante. Enfin $f(10) = e^{-0,3 \times 10} = e^{-3} \approx 0,050$: en 10 unités de temps, la valeur a été divisée par environ 20.

Réponse. a) $k = -0,3$ · b) décroissante ; $f(10) \approx 0,050$.

Correction de l'exercice 12 - Linéaire contre exponentielle

a) Valeurs (arrondies au dixième) :

t	1	2	3	4
$10t$	10	20	30	40
e^t	2,7	7,4	20,1	54,6

b) $g(3) < f(3)$ mais $g(4) > f(4)$: à partir de $t = 4$, l'exponentielle dépasse la fonction linéaire.

Une croissance linéaire ajoute 10 à chaque unité de temps ; une croissance exponentielle **multiplie** par $e \approx 2,72$. Même partie de plus bas, elle finit par dépasser toute croissance linéaire :

$$\frac{g(t+1)}{g(t)} = e \quad \text{pour tout } t$$

Réponse. b) À partir de $t = 4$.

Correction de l'exercice 13 - Taux d'évolution constant

a) Avec la relation fonctionnelle :

$$\frac{f(t+1)}{f(t)} = \frac{e^{0,1t+0,1}}{e^{0,1t}} = e^{0,1}$$

qui ne dépend pas de t .

b) Sur toute unité de temps, f est multipliée par $e^{0,1} \approx 1,1052$: le taux d'évolution est d'environ +10,5 %, toujours le même. C'est la caractéristique d'une croissance exponentielle.

Réponse. a) $e^{0,1}$ · b) environ +10,5 % par unité de temps.

Correction de l'exercice 14 - Quand la valeur double

a) $g(0) = 2$. Avec $(e^{at})' = a e^{at}$:

$$g'(t) = 2 \times 0,3 e^{0,3t} = 0,6 e^{0,3t} > 0$$

g est strictement croissante.

b) $g(2) = 2e^{0,6} \approx 3,64 < 4$ et $g(3) = 2e^{0,9} \approx 4,92 > 4$.

g étant croissante, la valeur double (de 2 à 4) pour un temps compris entre 2 et 3.

Réponse. a) $g(0) = 2$ · b) entre 2 et 3.

Correction de l'exercice 15 - Suite et fonction

a) $u_5 = 1\,000 \times 0,9^5 = 590,49 \text{ €}$; $f(5) = 1\,000 e^{-0,5} \approx 606,53 \text{ €}$.

b) Le modèle discret multiplie par 0,9 chaque année ; le modèle continu multiplie par $e^{-0,1} \approx 0,9048$

chaque année (car $\frac{f(t+1)}{f(t)} = e^{-0,1}$). Les deux coefficients sont proches (0,9 et 0,905),

mais le modèle continu baisse un peu moins vite : ses valeurs aux temps entiers forment la suite géométrique de raison $e^{-0,1}$.

Réponse. a) $u_5 = 590,49$; $f(5) \approx 606,53$ · b) raisons 0,9 et $e^{-0,1} \approx 0,905$.