

Plaque 5 - Modéliser une croissance ou une décroissance exponentielle

Fonction exponentielle — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Modèle exponentiel.

— $N(t) = N_0 e^{at}$ vérifie $N(0) = N_0$ et

$$N'(t) = a N(t)$$

— $a > 0$: croissance exponentielle ; $a < 0$: décroissance exponentielle.

— Sur toute durée τ , la grandeur est multipliée par le même nombre $e^{a\tau}$: c'est une évolution à taux constant.

— Modèle « avec plancher » : $T(t) = T_\infty + C e^{-kt}$ ($k > 0$) décroît vers des valeurs proches de T_∞ .

— Pour trouver quand une valeur est atteinte (sans logarithme) : tableau de valeurs à la calculatrice et encadrement, justifié par la monotonie.

Correction de l'exercice 1 - Décroissance radioactive

a) $N(0) = 800$; $N(10) = 800 e^{-0,5} \approx 485$; $N(20) = 800 e^{-1} \approx 294$.

b) Avec $(e^{at})' = a e^{at}$:

$$N'(t) = 800 \times (-0,05) e^{-0,05t} = -40 e^{-0,05t} < 0$$

N est strictement décroissante.

c) On cherche quand $N(t) = 400$. À la calculatrice : $N(13) = 800 e^{-0,65} \approx 417,6$ et $N(14) = 800 e^{-0,7} \approx 397,3$. N étant décroissante, la demi-vie est comprise entre 13 et 14 ans.

Réponse. a) 800 ; 485 ; 294 · c) entre 13 et 14 ans.

Correction de l'exercice 2 - Un plat qui refroidit

a) $T(0) = 20 + 70 = 90$ °C. $T(10) = 20 + 70 e^{-0,8} \approx 51,5$ °C.

b) Dérivée :

$$T'(t) = 70 \times (-0,08) e^{-0,08t} = -5,6 e^{-0,08t} < 0$$

T est strictement décroissante : le plat refroidit sans cesse, de moins en moins vite.

c) $T(15) = 20 + 70 e^{-1,2} \approx 41,1$ °C et $T(16) = 20 + 70 e^{-1,28} \approx 39,5$ °C. Le plat passe sous 40 °C au bout de 16 minutes.

Réponse. a) 90 °C ; 51,5 °C · b) décroissante · c) 16 minutes.

Correction de l'exercice 3 - Culture de bactéries

a) $N(5) = 500 e^2 \approx 3\,695$ bactéries.

b) Avec la dérivée de référence :

$$N'(t) = 500 \times 0,4 e^{0,4t} = 0,4 N(t)$$

La vitesse de croissance est proportionnelle au nombre de bactéries : plus elles sont

nombreuses, plus elles se multiplient vite.

c) $N(1) = 500 e^{0,4} \approx 746$ et $N(2) = 500 e^{0,8} \approx 1\,113$. La population atteint 1 000 (double de 500) entre 1 et 2 heures.

Réponse. a) $3\,695 \cdot c)$ entre 1 et 2 heures.

Correction de l'exercice 4 - Capital : discret ou continu

a) Suite géométrique de raison 1,04 :

$$5\,000 \times 1,04^{10} \approx 7\,401,22 \text{ €}$$

b) $C(10) = 5\,000 e^{0,4} \approx 7\,459,12 \text{ €}$.

Le modèle continu rapporte environ 58 € de plus : chaque année, il multiplie le capital par $e^{0,04} \approx 1,0408$, un peu plus que 1,04, car les intérêts produisent eux-mêmes des intérêts à chaque instant.

Réponse. a) $\approx 7\,401,22 \text{ €}$ · b) $\approx 7\,459,12 \text{ €}$.

Correction de l'exercice 5 - Élimination d'un médicament

a) $C(4) = 12 e^{-1} \approx 4,41 \text{ mg/L}$.

b) C est décroissante, car

$$C'(t) = 12 \times (-0,25) e^{-0,25t} = -3 e^{-0,25t} < 0$$

À la calculatrice : $C(5) = 12 e^{-1,25} \approx 3,44$ et $C(6) = 12 e^{-1,5} \approx 2,68$. La concentration passe sous 3 mg/L entre 5 et 6 heures : il faut renouveler l'injection au plus tard 5 heures après.

Réponse. a) $\approx 4,41 \text{ mg/L}$ · b) au bout de 5 heures (passage sous le seuil entre 5 et 6 h).

Correction de l'exercice 6 - Charge d'un condensateur

a) $u(0) = 10(1 - 1) = 0$; $u(2) = 10(1 - e^{-1}) \approx 6,32 \text{ V}$; $u(10) = 10(1 - e^{-5}) \approx 9,93 \text{ V}$.

b) $u(t) = 10 - 10 e^{-0,5t}$, donc

$$u'(t) = -10 \times (-0,5) e^{-0,5t} = 5 e^{-0,5t} > 0$$

u est strictement croissante. Comme $10 e^{-0,5t} > 0$, on a $u(t) < 10$: la tension se rapproche de 10 V sans jamais l'atteindre.

Réponse. a) 0 ; 6,32 ; 9,93 · b) $u' > 0$ et $u(t) = 10 - 10 e^{-0,5t} < 10$.

Correction de l'exercice 7 - Pression atmosphérique

a) $P(1) = 1\,013 e^{-0,12} \approx 898 \text{ hPa}$; $P(8,8) = 1\,013 e^{-1,056} \approx 352 \text{ hPa}$, environ un tiers de la pression au niveau de la mer.

b) Pour tout h :

$$\frac{P(h+1)}{P(h)} = e^{-0,12} \approx 0,887$$

À chaque kilomètre, la pression est multipliée par environ 0,887 : elle diminue d'environ 11,3 %, quelle que soit l'altitude de départ.

Réponse. a) $\approx 898 \text{ hPa}$; $\approx 352 \text{ hPa}$ · b) environ $-11,3 \%$ par km.

Correction de l'exercice 8 - Lumière sous l'eau

a) On calcule le rapport $\frac{I(x)}{I_0} = e^{-0,4x}$:

- à 5 m : $e^{-2} \approx 0,135$, soit environ 13,5 % ;
- à 10 m : $e^{-4} \approx 0,018$, soit environ 1,8 %.

b) Dérivée :

$$I'(x) = I_0 \times (-0,4) e^{-0,4x} < 0$$

car $I_0 > 0$ et $e^{-0,4x} > 0$: l'intensité diminue avec la profondeur. À 10 m, elle est le carré de ce qu'elle était à 5 m ($e^{-4} = (e^{-2})^2$).

Réponse. a) $\approx 13,5\%$; $\approx 1,8\%$ · b) $I' < 0$.

Correction de l'exercice 9 - Début d'épidémie

a) Sur une durée τ , le nombre de cas est multiplié par $e^{0,2\tau}$, car

$$\frac{C(t + \tau)}{C(t)} = e^{0,2\tau}$$

- chaque jour ($\tau = 1$) : $e^{0,2} \approx 1,22$, soit environ +22 % par jour ;
- chaque semaine ($\tau = 7$) : $e^{1,4} \approx 4,06$: le nombre de cas est multiplié par environ 4.

b) Une croissance exponentielle dépasse rapidement toute limite : après 60 jours, $C(60) = 50 e^{12}$ dépasserait 8 millions de cas par jour. En réalité, l'immunité, les mesures sanitaires et la taille finie de la population freinent l'épidémie.

Réponse. a) $\times 1,22$ par jour, $\times 4,06$ par semaine · b) la croissance exponentielle ne peut pas durer.

Correction de l'exercice 10 - Datation au carbone 14

a) À la calculatrice :

$$p(1\,000) = e^{-0,121} \approx 0,886 \quad p(5\,730) = e^{-0,693\,33} \approx 0,500$$

Après 1 000 ans, il reste environ 88,6 % du carbone 14 ; après 5 730 ans, environ la moitié.

b) 5 730 ans est la **demi-vie** du carbone 14 : la durée au bout de laquelle la moitié des noyaux s'est désintégrée. Après deux demi-vies, il en reste un quart ; c'est ce qui permet de dater des restes jusqu'à environ 50 000 ans.

Réponse. a) $\approx 88,6\%$; $\approx 50\%$ · b) la demi-vie.

Correction de l'exercice 11 - Vitesse d'un parachutiste

a) $v(0) = 5 + 45 = 50$ m/s ; $v(2) = 5 + 45 e^{-1,6} \approx 14,1$ m/s ; $v(5) = 5 + 45 e^{-4} \approx 5,8$ m/s.

b) Dérivée :

$$v'(t) = 45 \times (-0,8) e^{-0,8t} = -36 e^{-0,8t} < 0$$

La vitesse diminue. Comme $45 e^{-0,8t}$ devient très petit (environ 0,02 après 10 s), la vitesse se stabilise près de 5 m/s, la vitesse d'atterrissage.

Réponse. a) 50 ; 14,1 ; 5,8 m/s · b) décroissante, se stabilise près de 5 m/s.

Correction de l'exercice 12 - Recette maximale

a) Produit de $u(x) = 200x$ et $v(x) = e^{-0,05x}$, avec $v'(x) = -0,05 e^{-0,05x}$:

$$R'(x) = 200 e^{-0,05x} + 200x \times (-0,05) e^{-0,05x} = (200 - 10x) e^{-0,05x}$$

b) $e^{-0,05x} > 0$: $R'(x)$ a le signe de $200 - 10x$, positif pour $x < 20$, négatif pour $x > 20$. R est maximale pour $x = 20$, c'est-à-dire 2 000 articles.

$$R(20) = 4\,000 e^{-1} \approx 1\,472 \text{ €}.$$

Réponse. 2 000 articles ; recette maximale $\approx 1\,472$ €.

Correction de l'exercice 13 - Algues sur un étang

a) Pour tout t :

$$\frac{S(t+1)}{S(t)} = e^{0,1} \approx 1,105$$

La surface augmente d'environ 10,5 % par jour.

b) On cherche quand $S(t) = 100$. S est croissante ($S'(t) = 0,2 e^{0,1t} > 0$). À la calculatrice : $S(39) = 2 e^{3,9} \approx 98,8$ et $S(40) = 2 e^4 \approx 109,2$. La moitié de l'étang est couverte au bout de 40 jours.

Remarque. Le modèle cesse d'être valable quand l'étang est presque entièrement couvert.

Réponse. a) $e^{0,1} \approx 1,105$ · b) 40 jours.

Correction de l'exercice 14 - Perfusion

a) $C(2) = 8(1 - e^{-1}) \approx 5,06$ mg/L ; $C(6) = 8(1 - e^{-3}) \approx 7,60$ mg/L.

b) $C(t) = 8 - 8e^{-0,5t}$, donc

$$C'(t) = -8 \times (-0,5) e^{-0,5t} = 4 e^{-0,5t} > 0$$

C est croissante, et $C(t) < 8$ car $8e^{-0,5t} > 0$.

c) $C(2) \approx 5,06 > 5$ et C est croissante : la concentration efficace est atteinte un peu avant 2 heures (à la calculatrice, $C(1,9) \approx 4,91$).

Réponse. a) 5,06 ; 7,60 · c) oui, juste avant 2 heures.

Correction de l'exercice 15 - Deux populations

a) Sur une année, P_A est multipliée par $e^{0,01} \approx 1,0101$ (+1,0 %) et P_B par $e^{0,03} \approx 1,0305$ (+3,0 %) : B croît trois fois plus vite.

b) On étudie la différence $d(t) = P_B(t) - P_A(t)$:

$$d(23) = 25\,000 e^{0,69} - 40\,000 e^{0,23} \approx 49\,843 - 50\,344 < 0$$

$$\text{et } d(24) = 25\,000 e^{0,72} - 40\,000 e^{0,24} \approx 51\,361 - 50\,850 > 0.$$

B dépasse A entre $t = 23$ et $t = 24$: en 2049.

Réponse. a) +1 % contre +3 % par an · b) en 2049.