

Plaquette 1 - Propriétés algébriques : transformer une expression

Fonction exponentielle — Première spé maths

Corrections détaillées

Boîte à outils

Propriétés algébriques de l'exponentielle. Pour tous réels x, y et tout entier relatif n :

$$e^{x+y} = e^x \times e^y \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad (e^x)^n = e^{nx}$$

- $e^0 = 1$ et $e^1 = e \approx 2,718$.
- $e^x > 0$ pour tout réel x ; la fonction est strictement croissante.
- Identités remarquables avec $X = e^x$: $(e^x + 1)^2 = e^{2x} + 2e^x + 1$.
- **Pièges** : $e^{x+y} \neq e^x + e^y$; $e^{2x} = (e^x)^2 \neq 2e^x$; $(e^x)^2 \neq e^{x^2}$.

Correction de l'exercice 1 - Produits et quotients

On applique les propriétés algébriques, qui sont celles des puissances :

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad (e^x)^n = e^{nx}$$

- a) $e^{3+5} = e^8$.
- b) $e^{7-2} = e^5$.
- c) $e^{2 \times 3} = e^6$.
- d) $e^{-1+4} = e^3$.

Contrôle à la calculatrice pour a) : $e^3 \times e^5 \approx 20,09 \times 148,41 \approx 2\,981$ et $e^8 \approx 2\,981$.

Réponse. a) e^8 · b) e^5 · c) e^6 · d) e^3 .

Correction de l'exercice 2 - Avec une variable

On regroupe les exposants avec les règles des puissances :

$$e^a e^b = e^{a+b} \quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

- a) $e^{2x+(x-1)} = e^{3x-1}$.
- b) $e^{(x+2)-(x-3)} = e^5$: le résultat ne dépend pas de x .
- c) $e^{-2x} \times e^{3x} = e^x$.
- d) $\frac{1}{e^{-2x}} = e^{-(-2x)} = e^{2x}$.

Piège. Dans b), les parenthèses comptent : $(x+2) - (x-3) = 5$, et non -1 .

Réponse. a) e^{3x-1} · b) e^5 · c) e^x · d) e^{2x} .

Correction de l'exercice 3 - Simplifier des quotients

On divise **chaque terme** du numérateur par le dénominateur, avec

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$\text{a) } A = \frac{e^{2x}}{e^x} + \frac{e^x}{e^x} = e^x + 1.$$

$$b) B = \frac{e^{3x}}{e^{2x}} - \frac{e^x}{e^{2x}} = e^x - e^{-x}.$$

Contrôle avec $x = 0$: $A = \frac{1+1}{1} = 2 = e^0 + 1$ et $B = \frac{1-1}{1} = 0 = 1 - 1$.

Réponse. a) $e^x + 1$ · b) $e^x - e^{-x}$.

Correction de l'exercice 4 - Développer

On utilise les identités remarquables, avec $(e^x)^2 = e^{2x}$ et $e^x \times e^{-x} = e^0 = 1$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$a) (e^x + 1)^2 = e^{2x} + 2e^x + 1.$$

$$b) (e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x} = e^{2x} - 2 + e^{-2x}.$$

$$c) (e^x + 2)(e^x - 2) = e^{2x} - 4.$$

Piège. $(e^x)^2 = e^{2x}$, et non e^{x^2} .

Réponse. a) $e^{2x} + 2e^x + 1$ · b) $e^{2x} - 2 + e^{-2x}$ · c) $e^{2x} - 4$.

Correction de l'exercice 5 - Factoriser

On cherche un facteur commun, puis une identité remarquable.

$$a) e^{2x} = e^x \times e^x, \text{ donc } e^{2x} - e^x = e^x(e^x - 1).$$

$$b) \text{ Facteur commun } e^x : xe^x + 2e^x = (x+2)e^x.$$

$$c) \text{ Différence de deux carrés, avec } e^{2x} = (e^x)^2 :$$

$$e^{2x} - 9 = (e^x - 3)(e^x + 3)$$

Intérêt. Comme $e^x > 0$, la forme b) montre tout de suite que l'expression a le signe de $x+2$: c'est la méthode utilisée pour étudier le signe d'une dérivée.

Réponse. a) $e^x(e^x - 1)$ · b) $(x+2)e^x$ · c) $(e^x - 3)(e^x + 3)$.

Correction de l'exercice 6 - Démontrer une égalité

On part du membre de droite et on multiplie numérateur et dénominateur par e^x , non nul :

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x(1+e^{-x})} = \frac{e^x}{e^x + e^x e^{-x}}$$

Or $e^x e^{-x} = e^0 = 1$, donc le dénominateur vaut $e^x + 1$: on obtient le membre de gauche.

Contrôle avec $x = 0$: les deux membres valent $\frac{1}{2}$. Cette fonction, appelée « sigmoïde », sert en biologie et en intelligence artificielle.

Réponse. On multiplie numérateur et dénominateur par e^x .

Correction de l'exercice 7 - Valeurs approchées

À la calculatrice :

$$- e^2 \approx 7,389 ;$$

$$- e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,368 ;$$

$$- \sqrt{e} \approx 1,649.$$

Pourquoi $\sqrt{e} = e^{0,5}$. Le nombre $e^{0,5}$ est positif, et son carré vaut

$$(e^{0,5})^2 = e^{0,5 \times 2} = e^1 = e$$

C'est donc le nombre positif dont le carré est e , c'est-à-dire $\sqrt{e}$.

Réponse. $e^2 \approx 7,389$; $e^{-1} \approx 0,368$; $\sqrt{e} = e^{0,5} \approx 1,649$.

Correction de l'exercice 8 - Comparer sans calculatrice

La fonction exponentielle est strictement croissante :

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

- a) $-3 < -2$, donc $e^{-3} < e^{-2}$.
- b) $3 < \pi$, donc $e^3 < e^\pi$.
- c) $1 = e^0$ et $-0,1 < 0$, donc $e^{-0,1} < 1$.

Contrôle à la calculatrice : $e^{-3} \approx 0,050$ et $e^{-2} \approx 0,135$; $e^3 \approx 20,1$ et $e^\pi \approx 23,1$; $e^{-0,1} \approx 0,905$.

Réponse. a) $e^{-3} < e^{-2}$ · b) $e^3 < e^\pi$ · c) $e^{-0,1} < 1$.

Correction de l'exercice 9 - Étudier un signe

On utilise deux propriétés : $e^X > 0$ pour tout réel X , et la stricte croissance

$$e^x > 1 = e^0 \Leftrightarrow x > 0$$

- a) Somme de deux nombres strictement positifs : $e^x + 1 > 0$ pour tout x .
- b) $e^{3x} > 0$, donc $-2e^{3x} < 0$ pour tout x .
- c) $e^x > 0$: le produit a le signe de $x - 3$, négatif pour $x < 3$, nul en 3, positif pour $x > 3$.
- d) $e^x - 1$ est négatif pour $x < 0$, nul en 0, positif pour $x > 0$.

Réponse. a) > 0 · b) < 0 · c) signe de $x - 3$ · d) signe de x .

Correction de l'exercice 10 - Vrai ou faux

On teste avec les propriétés, et on réfute par une valeur de x .

- a) **Vrai** : $e^{x+1} = e^x e^1$.
- b) **Faux** : $e^{2x} = (e^x)^2$. Pour $x = 0$: $e^0 = 1$ mais $2e^0 = 2$.
- c) **Faux** : $e^{-x} > 0$ alors que $-e^x < 0$. La bonne formule est

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

- d) **Faux** : $(e^x)^2 = e^{2x}$. Pour $x = 1$: $e^2 \approx 7,39$ mais $e^{1^2} = e \approx 2,72$.

Réponse. a) vrai · b) faux · c) faux · d) faux.

Correction de l'exercice 11 - Une fonction paire

a) $c(0) = \frac{1+1}{2} = 1$.

b) Pour tout réel x , $-x$ est réel et

$$c(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = c(x)$$

La fonction est paire : sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

c) $2c(x) - 2 = e^x - 2 + e^{-x} = (e^{x/2})^2 - 2e^{x/2}e^{-x/2} + (e^{-x/2})^2 = (e^{x/2} - e^{-x/2})^2 \geq 0$, car $e^{x/2}e^{-x/2} = 1$. Donc $c(x) \geq 1$, avec égalité en $x = 0$.

Réponse. a) $1 \cdot b) c(-x) = c(x) \cdot c) 2c(x) - 2$ est un carré.

Correction de l'exercice 12 - Produits remarquables

On utilise $e^x e^y = e^{x+y}$ et l'identité

$$(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$$

a) $e^{a+1-a} = e^1 = e$: le résultat ne dépend pas de a .

b) $(e^a)^2 - (e^{-a})^2 = e^{2a} - e^{-2a}$.

c) $e^a e^{-a} + e^a e^a = 1 + e^{2a}$.

Contrôle avec $a = 0$: a) e ; b) $(2)(0) = 0 = 1 - 1$; c) $1 \times 2 = 2 = 1 + 1$.

Réponse. a) $e \cdot b) e^{2a} - e^{-2a} \cdot c) 1 + e^{2a}$.

Correction de l'exercice 13 - Changement d'écriture

On développe le membre de droite, avec $e^x \times e^x = e^{2x}$:

$$(e^x - 1)(e^x - 2) = e^{2x} - 2e^x - e^x + 2 = e^{2x} - 3e^x + 2$$

L'égalité est démontrée. On peut aussi poser $X = e^x$: l'expression devient le trinôme $X^2 - 3X + 2$, de racines 1 et 2.

Signe pour $x < 0$. La fonction exponentielle étant croissante, $0 < e^x < e^0 = 1$. Alors $e^x - 1 < 0$ et $e^x - 2 < 0$: le produit est **strictement positif**.

Réponse. Égalité vraie ; pour $x < 0$, l'expression est strictement positive.

Correction de l'exercice 14 - Trouver un exposant

On écrit chaque membre sous la forme e^u , puis on utilise

$$e^u = e^v \Leftrightarrow u = v$$

(conséquence de la stricte croissance de l'exponentielle).

a) $e^{3a} = e^6 \Leftrightarrow 3a = 6 \Leftrightarrow a = 2$.

b) $e^{5a-a-2} = e^{4a-2} = e^{10} \Leftrightarrow 4a-2 = 10 \Leftrightarrow a = 3$.

c) $e^{3a} = e^{-3} \Leftrightarrow a = -1$.

Contrôle de b) : $\frac{e^{15}}{e^5} = e^{10}$.

Réponse. a) $a = 2 \cdot b) a = 3 \cdot c) a = -1$.

Correction de l'exercice 15 - Une expression constante

Méthode 1 : développer. Avec $e^x e^{-x} = 1$:

$$- (e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2 + e^{-2x} ;$$

$$- (e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} - 2 + e^{-2x} ;$$

$$- \text{la différence vaut } 2 - (-2) = 4.$$

Méthode 2 : différence de deux carrés.

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) = (2e^{-x})(2e^x) = 4$$

Vérifications. $x = 0$: $2^2 - 0^2 = 4$. $x = 1$: $e + e^{-1} \approx 3,086$ et $e - e^{-1} \approx 2,350$, d'où $9,524 - 5,524 = 4$ (aux arrondis près).

Réponse. L'expression vaut 4 pour tout x .