

Plaquette 3 - Dérivées et études de fonctions avec l'exponentielle

Fonction exponentielle — Première spé maths

Exercices

Méthode

On dérive avec les règles connues (somme, produit, quotient) et les deux dérivées de référence $(e^x)' = e^x$ et $(e^{at})' = a e^{at}$. Pour étudier le signe de la dérivée, on **factorise par l'exponentielle** : elle est strictement positive, le signe vient de l'autre facteur.

Exercice 1 - Dérivées de sommes

Calculer la dérivée de chaque fonction, définie sur $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = 3e^x - x^2$

b) $g(x) = e^x + 5x - 1$

c) $h(x) = -2e^x + \frac{x^3}{3}$

Exercice 2 - Dériver $e^{(at)}$

Calculer la dérivée de chaque fonction, définie sur $\mathbb{R}$, et en déduire son sens de variation :

a) $f(t) = 4e^{0,5t}$

b) $g(t) = e^{-3t}$

c) $h(t) = 10e^{-0,2t}$

Exercice 3 - Dérivées de produits

Calculer et factoriser la dérivée de :

a) $f(x) = xe^x$

b) $g(x) = (2x + 1)e^x$

c) $h(x) = x^2e^x$

Exercice 4 - Dérivées de quotients

Calculer la dérivée de :

a) $f(x) = \frac{e^x}{x}$ sur $]0; +\infty[$

b) $g(x) = \frac{e^x}{x+1}$ sur $] -1; +\infty[$

Exercice 5 - Étude d'un minimum

Soit $f(x) = (x - 1)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

b) Dresser le tableau de variations de f et donner son minimum.

Exercice 6 - Étude d'un maximum

Soit $f(x) = (2 - x)e^x$ sur $\mathbb{R}$. Étudier ses variations et donner son maximum.

Exercice 7 - Avec e^{-x}

Soit $f(x) = xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que $f(x) = (1 - x)e^{-x}$.
- En déduire les variations de f et son maximum.

Exercice 8 - Tangentes à la courbe de exp

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction exponentielle :

- au point d'abscisse 0 ;
- au point d'abscisse 1.

Que remarque-t-on pour la tangente en 1 ?

Exercice 9 - Tangente à $x \exp(x)$

Soit $f(x) = xe^x$. Déterminer l'équation de la tangente à sa courbe aux points d'abscisses 0 et -1 .

Exercice 10 - Démontrer une inégalité

Soit $g(x) = e^x - x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

- Étudier les variations de g .
- En déduire que $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x . Interpréter graphiquement.

Exercice 11 - Comparer à un polynôme

Soit $h(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

- Calculer $h'(x)$ et utiliser l'inégalité $e^x \geq x + 1$ pour trouver son signe.
- En déduire la position de la courbe de l'exponentielle par rapport à la parabole $y = 1 + x + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 12 - Concentration d'un médicament

La concentration d'un médicament dans le sang (en mg/L) est modélisée par $C(t) = 5te^{-0,5t}$, où $t \geq 0$ est le temps en heures.

- Montrer que $C'(t) = (5 - 2,5t)e^{-0,5t}$.
- Au bout de combien de temps la concentration est-elle maximale ? Quelle est cette concentration maximale (au centième) ?

Exercice 13 - Nombre dérivé en 0

Pour quelle valeur de a la fonction $t \mapsto e^{at}$ a-t-elle un nombre dérivé égal à 2 en 0 ?
Donner alors l'équation de la tangente en 0.

Exercice 14 - Deux extremums

Soit $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que $f'(x) = (x - 1)(x + 3)e^x$.
- Dresser le tableau de variations de f (valeurs des extremums arrondies au centième).

Exercice 15 - Minimum d'un quotient

Soit $f(x) = \frac{e^x}{x}$ sur $]0; +\infty[$.

- Étudier les variations de f .
- En déduire que $e^x \geq ex$ pour tout $x > 0$.